

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 14

Cursus methoden der mathematische ~~ph~~ysica, 1.

Potentiaaltheory en conforme afbeelding.

R. Timman.



1951

CURSUS

Methoden der mathematische physica, 1.

1950-1951

Potentiaaltheorie en conforme afbeelding.

R. Timman

TW

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
 AMSTERDAM

1950/51

Afd. Toegepaste Wiskunde.

Cursus:

Methoden der mathematische physica

Deel I. Potentiaaltheorie en con-
forme afbeelding.

door

R. Timman.

Algemene Inleiding.

Bij een aandachtige beschouwing van de verschillende toepassingen van de wiskunde op de physica en de techniek blijkt het, dat een groot aantal van de ogenschijnlijk meest verschillende gebieden van de physica en de techniek mathematische formuleringen toelaten, die vrijwel identiek zijn. Bij de aanvankelijk zeer grote verscheidenheid van fysische en technische problemen komen feitelijk alleen twee grote gebieden uit de wiskunde te voorschijn, het geheel der theorieën, die men onder de naam Mathematische Physica samenvat en die onderling een zeer grote samenhang vertonen en de Mathematische Statistiek. Aan deze namen, waarin het woord mathematisch als bijvoeglijk naamwoord optreedt, is het al direct te zien, dat zij bij uitstek als toegepaste wiskunde kunnen gelden, immers beide namen drukken uit, dat het hier om een andere wetenschap gaat, die mathematisch geformuleerd kan worden.

Hoewel ook tussen deze twee vakken relaties bestaan, immers de moderne quantenmechanica maakt gebruik van resultaten van elk der twee hier genoemde gebieden, evenals de moderneturbulentietheorie, vormen zij afzonderlijke gebieden, die ook afzonderlijk behandeld kunnen worden. In het vervolg zullen wij ons vrijwel uitsluitend met de Mathematische Physica bezig houden en verstaan hieronder het samenstel van die gebieden uit de wiskunde, die gebruikt worden bij de mathematische formulering en oplossing van problemen uit de klassieke physica, dus die physica, waarin de quantentheorie geen of een zeer geringe rol speelt, zoals de mechanica der continue media (stromingsleer, elasticiteits- en plasticiteitstheorie), de warmtegeleiding en de electrodynamica. Het wezenlijke in deze theorieën is de opvatting van de fysische grootheden als continue grootheden, zodat de relaties tussen hen als differentiaal-vergelijkingen en wel, omdat meestal het aantal onafhankelijk veranderlijken meer dan één is, als partiële differentiaal-vergelijkingen te voorschijn komen.

We hadden dus ook als titel kunnen kiezen: De partiele differentiaalvergelijkingen der mathematische Physica, ware het niet, dat in sommige gevallen een andere formulering (integraalvergelijkingen of variatieproblemen) wenselijker is.

Door de verscheidenheid der natuurverschijnselen zeer groot is zal de aanmerkelijke reductie, die bij de mathematische formulering optreedt, toch nog een zeer omvangrijk gebied ter bestudering over laten, dat onmogelijk in een korte tijd behandeld kan worden. Het uitgangspunt is tamelijk willekeurig, men zal in het algemeen beginnen met een betrekkelijk eenvoudig overzichtelijk gebied om van daaruit de stap naar moeilijker gebieden te wagen. Als eerste gebied is daarom gekozen een van de oudste gebieden der Mathematische Physica, n.l. de Potentiaaltheorie, die in twee dimensies equivalent is aan de leer der complexe functies en der conforme afbeeldingen. In volgende cursussen zullen andere gebieden besproken worden, zoals de golfvergelijking, de elasticiteitstheorie en de leer der trillingen, in samenhang met integraalvergelijkingen en variatieproblemen.

Als literatuur, waarin min of meer het gehele gebied der Mathematische Physica beschreven wordt, noemen wij:

- R. von Mises - Ph. Frank: Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.
Bd. I, II, New York, Mary S. Rosenberg, 1943.
- R. Courant - D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik
Bd I en II; Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1931 en 1937.
- H. Bateman: The partial Differential equations of Mathematical Physics, Dover, 1944.
- H. Webster: Partial Differential equations of Mathematical Physics. New York, Hafner, 1947.
- Verder voor de potentiaaltheorie:
- O.D. Kellog: Foundations of Potential Theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1929
- Steinberg: Potentialtheorie, Sammlung Götschen.
- Steinberg en Smith: The theory of potential and Spherical Harmonics. Toronto, 1946. The University of Toronto Press.
- terwijl in verschillende boeken, die gebieden der physica behandelen, potentiaaltheorie besproken wordt, zoals
- H. Lamb: Hydrodynamics. 5th Ed. Dover, New York.
- Stratton: Electromagnetic theory, Mac. Graw-Hill New York, 1941.

Hoofdstuk I. Kracht- en stromingsvelden.

1. De gravitatiewet.

De potentiaaltheorie vindt haar oorsprong in de mathematische formulering van de algemene gravitatiewet van Newton.

Ieder massadeeltje in het heelal trekt ieder ander deeltje aan met een kracht in de richting van hun verbindingslijn welks grootte evenredig is met het product van hun massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun afstand.

De toepasbaarheid van de potentiaaltheorie is echter niet beperkt tot de gravitatiekrachten alleen, zij geeft het fundament voor de theorie van het electrostatische en magnetostatische veld, waar de veldkrachten ook omgekeerd evenredig zijn met het kwadraat van de afstand tussen de elementaire deeltjes, die krachtwerkingen uitoefenen en verder geeft zij, zoals blijkt bij het opstellen van de differentiaalvergelijkingen, die bij de krachten behoren, de theorie van de stroming van incompressibele vloeistoffen en de stationaire problemen van warmtegeleiding.

Mathematisch geformuleerd luidt de wet van Newton:

$$K = f \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

waarbij \vec{r} de vector is, die de verbindingslijn van de twee massapunten voorstelt, m_1 en m_2 hun massa's en f de algemene gravitatieconstante.

Noemen wij de coördinaten van de punten x_1, y_1, z_1 en x_2, y_2, z_2 dan is $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

$$\text{en } K = f \frac{m_1 m_2}{r^3} \{ (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j} + (z_1 - z_2) \vec{k} \},$$

waarbij \vec{i} , \vec{j} en \vec{k} de eenheidsvectoren langs de coördinaatassen zijn.

In de electrostatica treedt precies dezelfde wet op voor de kracht, die twee ladingen e_1 en e_2 op afstand r op elkaar uitoefenen

$$K = \frac{e_1 e_2}{r^3} \vec{r}.$$

Onder de veldsterkte in een punt van de ruimte verstaan wij de kracht die op de eenheid van de massa in dat punt wordt uitgeoefend. Zij is dus een vectorgrootte.

Het veld in een punt x, y, z , van een massapunt met massa m in een punt x_1, y_1, z_1 , is dus gegeven door

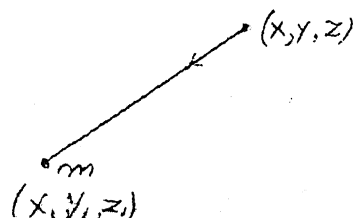
$$\vec{F} = f \cdot \frac{m}{r^3} \vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

en de componenten zijn

$$X = f \frac{m}{r^3} (x_1 - x)$$

$$Y = f \frac{m}{r^3} (y_1 - y)$$

$$Z = f \frac{m}{r^3} (z_1 - z)$$



2. Het veld van lichamen van eindige afmetingen.

In werkelijkheid hebben wij nooit met massapunten te maken, maar met continu verdeelde massas in de driedimensionale ruimte. Om de werking van twee lichamen van eindige uitgebreidheid op elkaar te beschouwen, maken wij gebruik van het volgende principe. Indien twee lichamen gegeven zijn, verdelen wij deze in elementen op de wijze, zoals in de integraalrekening gebruikelijk is en denken de massa van ieder elementje in een punt in het inwendige geconcentreerd. Dan is de kracht, die het ene lichaam op het andere uitoefent, gelijk aan de limiet van de kracht, die het ene systeem vervangende massapunten op het andere uitoefent, berekend volgens de bovengenoemde wet, indien wij de verdeling steeds fijner maken zodat de maximale koorde van de elementen naar nul gaat.

Om dit beginsel te legitimeren moeten wij dus in de eerste plaats laten zien, dat de op deze wijze gedefinieerde limiet bestaat en ten tweede, dat voor lichamen van kleine afmetingen de oorspronkelijke wet van Newton weer terugkomt.

Wij beschouwen nu eerst de krachtwerking van een lichaam van eindige afmetingen op een puntmassa, die erbuiten is geplaatst in een punt P. De totale kracht is de limiet van de som van de krachten, die de massapunten, P_i die in elk element de massa Δm_i representeren, uitoefent op het in P geplaatste massapunt. Zo wordt de veldsterkte in dat punt

$$\vec{F} = \lim \left\{ \sum_i \frac{\Delta m_i}{r_i^2} \vec{r}_i \right\}$$

waarbij r_i de verbindingslijn PP_i voorstelt. Voeren wij in de specifieke massa, of dichtheid $\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$ waarbij ΔV_i het volume van het i^e element voorstelt, dan is

$$\vec{F} = \lim \left\{ \sum_i \frac{\rho_i}{r_i^2} \vec{r}_i \Delta V_i \right\}$$

Indien wij de verdeling steeds fijner maken, gaat de som over in een integraal. Daar P buiten het lichaam ligt, is steeds $r_i > 0$. De functie $\rho(x, y, z)$ is steeds een integreerbare functie, zodat ook de integraal

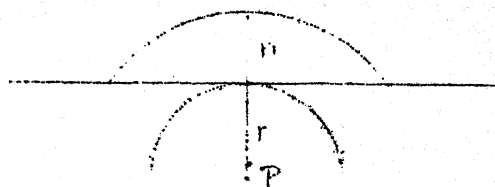
$$\vec{F} = \int \iiint \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dV$$

uitgestrekt over het gehele volume van het lichaam bestaat en de veldsterkte in het punt P voorstelt. Zijn de coördinaten van $P(x_p, y_p, z_p)$, dan zijn de componenten van \vec{F} gegeven door

$$\begin{aligned} X &= \int \iiint \frac{\rho}{r^3} (x - x_p) dx dy dz, \\ Y &= \int \iiint \frac{\rho}{r^3} (y - y_p) dx dy dz, \\ Z &= \int \iiint \frac{\rho}{r^3} (z - z_p) dx dy dz. \end{aligned}$$

Wij hebben de restrictie gemaakt, dat het punt P buiten het beschouwde lichaam lag. Op het eerste gezicht lijkt het, dat de kracht oneindig zal worden, als wij P tot het oppervlak laten naderen, immers één van de termen van de som zal oneindig groot worden. Bij nader inzien is deze idee niet juist, door een geschikte keuze van de elementen wordt bereikt, dat met de afstand ook het volume van het beschouwde element naar nul gaat.

Laat P een afstand r tot het oppervlak hebben en beschouw de massa van het lichaam binnen de bol met straal



$2r$ om P. Deze massa is van de orde r^3 en haar aantrekking is dus van de orde $\frac{r^3}{r^2} = r$, zodat de kracht van de nabijgelegen massa's niet groot, wordt maar klein.

Voor een punt binnen het lichaam worden de integralen oneigenlijk. Om de integralen te berekenen, sluiten wij het punt P uit door een klein volumeelementje v en strekken de integratie uit over het volume $(V - v)$. Wij veronderstellen nu, dat de veldsterkte verkregen wordt als de limiet van de integralen over $V - v$, als wij v tot nul laten naderen, indien deze integraal bestaat. Dit onderzoeken wij aan het geval, dat het elementje v de vorm heeft van een bolletje Δ met straal δ om P. Leg een tweede, concentrische bol B met straal R om P, dan is

$$\vec{F} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ f \cdot \iiint_{V-B} \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dv + f \cdot \iiint_{B-\Delta} \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dv \right\} =$$

$$f \cdot \iiint_{V-B} \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dv + \lim_{\delta \rightarrow 0} \iiint_{B-\Delta} \frac{\rho}{r^3} \vec{r} dv.$$

Wij berekenen nu de tweede integraal afzonderlijk en wel alleen de x component

$$\iiint_{B-\Delta} \frac{x}{r^3} dv$$

Daar ρ begrensd is, is deze integraal begrensd door $2\rho_{\max} \iiint_{B-\Delta} \frac{dv}{r^3}$ waarbij de integratie alleen over de rechterhelft is uitgestrekt. Voeren wij nu de poolcoördinaten in

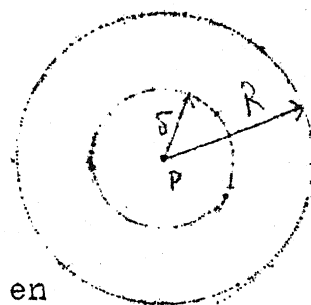
$$\text{dan is } x = r \cos \theta \quad dv = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

$$\iiint_{B-\Delta(x>0)} \frac{x}{r^3} dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_\delta^R \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^3} dr d\varphi d\theta = \pi(R - \delta)$$

zodat in de limiet een eindige waarde overblijft. Analooch voor de andere componenten. Daar in formule (1) de eerste integraal onafhankelijk is van δ is bewezen, dat de totale integraal steeds beneden een zekere waarde blijft en, daar zij met afnemende δ toeneemt, bestaat de limiet.

Het geval, dat het punt P op het oppervlak van het lichaam ligt, is hierin begrepen, men heeft slechts buiten het lichaam $\rho = 0$ te stellen.

Indien de massa niet over een lichaam is verdeeld, maar over een oppervlak of een lijn, wordt de integraal op analoge wijze berekend.



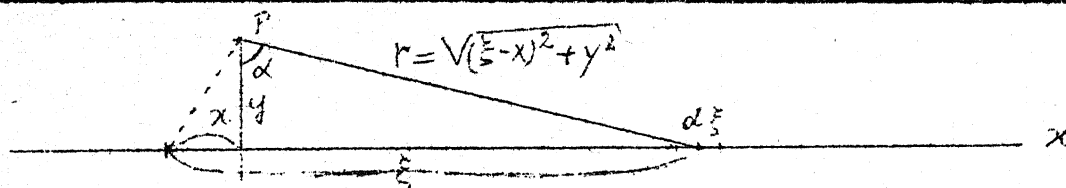
In werkelijkheid hebben wij niet te maken met een mathematisch oppervlak of een mathematische kromme, maar met een dunne schaal of een dunne stang, zodat de elementen, die wij ter vervanging nemen van het oppervlak worden ingesneden door een stel oppervlakteelementen of lijnelementen. De betrokken integralen zijn dan oppervlakteintegralen of lijnintegralen en de formules worden

$$\vec{F} = f \iint \frac{\rho \vec{r}}{r^3} d\sigma$$

$$\text{resp. } \vec{F} = f \int \frac{\rho \vec{r}}{r^3} ds$$

Voorbeelden.

1. Krachtveld van een rechte lijnsegment van constante massa met lengte 1.



Kies de lijn met massa ρ per lengte-eenheid langs de x as, dan is de kracht in het punt $P(x, y)$

$$X = -f \int_0^1 \frac{\rho(\xi - x)}{r^3} d\xi$$

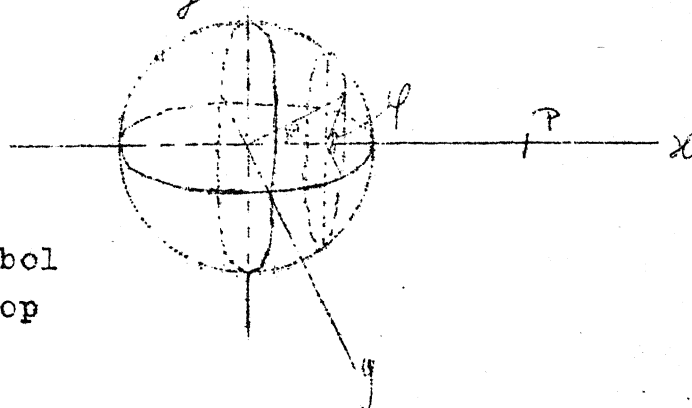
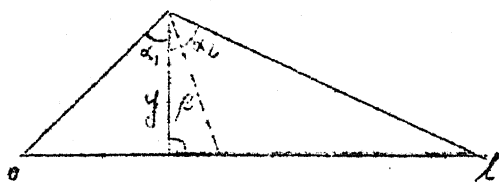
$$Y = -f \int_0^1 \frac{\rho y}{r^3} d\xi$$

Voer in de heek α , bepaald door $\tan \alpha = \frac{\xi - x}{y}$, dan is $r = \frac{y}{\cos \alpha}$, $\xi - x = y \tan \alpha$,
 $d\xi = \frac{y d\alpha}{\cos^2 \alpha}$
 en

$$X = -\frac{\rho f}{y} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{y^2 \tan \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} d\alpha = \frac{\rho f}{y} [\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2],$$

$$Y = -\frac{\rho f}{y} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\rho f}{y} [\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2],$$

als α_1 en α_2 de hoeken zijn, die met de uiteinden van de lijn corresponderen. Laten wij de lengte van de lijn steeds toenemen, dan nadert α_1 tot $\frac{1}{2}\pi$ en α_2 tot $-\frac{1}{2}\pi$, zodat $X \rightarrow 0$ en $Y \rightarrow \frac{2\rho f}{y}$.



Bolschaal met constante belegging.

Punt P op de x as $(x, 0, 0)$. Straal bol R. Voer poolcoördinaten in, dan is op het boloppervlak

$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta \cos \varphi$$

$$z = R \sin \theta \sin \varphi$$

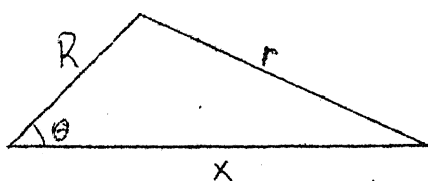
$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

en de afstand van P tot het element is gegeven door

$$r^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos \theta$$

zodat wij vinden

$$Y = Z = 0 \text{ wegens de symmetrie}$$



$$X = \int \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho \cdot R^2 \sin \theta d\theta d\varphi (x - R \cos \theta)}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \theta)^{3/2}}$$

$$= \int 2\pi \rho R^2 \int_0^\pi \frac{(x - R \cos \theta) \sin \theta d\theta}{(R^2 + x^2 - 2Rx \cos \theta)^{3/2}}$$

Voeren wij r als nieuwe integratievariabele in, dan is:

$$2r dr = + 2Rx \sin \theta d\theta$$

$$(x - R \cos \theta) = \frac{r^2 + x^2 - R^2}{2x}$$

zodat

$$X = \int 2\pi \rho R^2 \int_{|x-R|}^{x+R} \frac{(r^2 + x^2 - R^2) r dr}{2 r^2 x^2 R} = \frac{4\pi \rho R^3}{x^2 R^2} \left[x+R - |x-R| + (x^2 - R^2) \left\{ \frac{1}{|x-R|} - \frac{1}{x+R} \right\} \right] =$$

$$\int = \frac{4\pi \rho R^3}{x^2 R^2} [2R + 2R] = \frac{4\pi \rho R^2}{x^2} = \frac{M}{x^2} \text{ voor } x > R$$

$$\int = \frac{4\pi \rho R^3}{x^2 R^2} [2x - 2x] = 0 \text{ voor } x < R$$

daar wij tijdens de integratie eraan moeten denken, dat r een afstand is en dus steeds positief is, d.w.z., voor $\theta = 0$ is $r = x - R$ voor $x > R$ en $r = R - x$ voor $x < R$.

De bolschaal trekt dus punten buiten de schaal aan met een kracht, die hetzelfde is, alsof alle massa in het middelpunt was geconcentreerd, terwijl binnen de schaal de krachtwerking nul is. De kracht maakt op het oppervlak dus een sprong van $f \cdot 4\pi \rho R$ en is dus discontinu.

Voor een punt $x = R$ op het boloppervlak vinden wij de kracht door eerst het punt, volgens het bovenstaande, te omsluiten met een klein cirkeltje, d.w.z.

$$X = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\rho R^2 \sin \theta d\theta d\varphi R(1 - \cos \theta)}{R^3 (2 - 2 \cos \theta)^{3/2}} =$$

$$= \int 2\pi \rho R \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{2(2 - 2 \cos \theta)^{3/2}} = 2\pi \rho R \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\pi \cos^2 \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2} = 2\pi \rho R$$

zodat de kracht in dit punt juist het gemiddelde is van de krachten in naburige punten buiten en binnen de bol gelegen.

3. Homogene bol met straal R

Het veld in een punt P kunnen wij vinden door integratie van het resultaat voor een bolschil.

Voor een punt P buiten de bol vinden wij

$$\vec{F} = \int \int \frac{4\pi \rho r^2}{x^2} dr = \int \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \frac{1}{x^2} = \frac{M}{x^2}, \quad x > R$$

voor een punt binnen de bol dragen alleen de delen gelegen binnen een boloppervlak door dat punt bij:

$$\vec{F} = \int \int \frac{4\pi \rho r^2}{x^2} dr = \frac{4}{3} \pi \rho x^3$$

zodat de veldsterkte binnen in de bol lineair toeneemt tot het oppervlak. en zich daarna gedraagt, alsof alle massa in het middelpunt van de bol geconcentreerd was.

Krachtvelden en andere vectorvelden.

Wij kunnen nu in ieder punt van de ruimte de veldsterkte berekenen, die bij een gegeven massaverdeling behoort. In ieder punt is dus een vector bepaald. Indien wij nu lijnen tekenen, zodanig, dat in ieder punt de vector langs de raaklijn is gericht, verkrijgen wij een stel krommen, de veldlijnen of in dit geval, de krachtlijnen. Indien de veldcomponenten zijn X , Y en Z zijn

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

de differentiaalvergelijkingen voor de veldlijnen.

Een vectorveld wordt ook opgeleverd door een stromingsveld, waarbij in ieder punt de snelheid van het medium is gegeven.

Indien de coördinaten van een punt zijn x , y , z , dan zijn de differentiaalvergelijkingen voor de beweging

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(x, y, z, t).$$

In het algemeen zal \vec{v} expliciet van de tijd afhangen, indien dit niet het geval is, is de beweging stationnair.

Uitgeschreven zijn de vergelijkingen

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t),$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t),$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t).$$

en de oplossing zal de vorm hebben

$$\vec{r} = \vec{g}(t, a, b, c)$$

waarbij a , b en c integratieconstanten zijn, die bepaald zijn door de waarden van x , y en z op het tijdstip t_0 : x_0 , y_0 en z_0 zodat we tenslotte de oplossing in de vorm kunnen schrijven

$$\vec{r} = \vec{h}(t, x_0, y_0, z_0)$$

De vergelijkingen in deze vorm staan bekend als vergelijkingen van Lagrange, zij leveren de baankrommen van de deeltjes.

Op ieder ogenblik $t_1 = \text{const}$ kunnen wij de vergelijkingen schrijven als

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t_1)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t_1)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t_1)}$$

die dus een vectorveld voorstellen. De veldlijnen van dit veld zijn de stroomlijnen. In het algemeen zullen de stroomlijnen verschillen van de baankrommen, die bepaald zijn door

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} = dt$$

Alleen als de verhouding u :, v :, w onafhankelijk is van t , dus o.a.

voor een stationnaire beweging zullen de baankrommen met de stroomlijnen samenvallen.

Voorbeelden.

$$\vec{r} \cdot \begin{cases} u = x \\ v = y \\ w = z \end{cases}$$

De baankrommen worden geleverd door de vergelijkingen

(9.)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = dt$$

dus

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^t, \\ y &= y_0 e^t, \\ z &= z_0 e^t. \end{aligned}$$

zij zijn dus rechte lijnen door de oorsprong en vallen samen met de stroomlijnen, die bepaald zijn door

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

of wel

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}.$$

Daar de snelheden niet van t afhangen, is de beweging stationnair.

$$2. \quad u = tx$$

$$v = y$$

$$w = z.$$

baankrommen:

$$\frac{dx}{xt} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

of wel

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{\frac{1}{2}t^2} \\ y &= y_0 e^t \\ z &= z_0 e^t \end{aligned}$$

stroomlijnen op tijdstip t volgen uit

$$\frac{dx}{tx} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

stroomlijn door x_0, y_0, z_0 .

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{1/t} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$$

vallen niet samen met de baankrommen.

$$3). \quad u = tx$$

$$v = ty$$

$$w = tz$$

baankrommen

$$\frac{dx}{xt} = \frac{dy}{yt} = \frac{dz}{zt} = dt.$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{\frac{1}{2}t^2} \\ y &= y_0 e^{\frac{1}{2}t^2} \\ z &= z_0 e^{\frac{1}{2}t^2} \end{aligned}$$

$$\text{stroomlijnen} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = 0 \quad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}$$

Hoewel de beweging niet stationnair is, vallen de stroomlijnen samen met de banen van de deeltjes.

HEMATISCH CENTRUM

2de Boerhaavestr. 49

A m s t e r d a m - O .

Afd. Toegepaste Wiskunde.

Cursus:

Methoden der mathematische physica.
Deel I. Potentiaaltheorie en op
conforme afbeelding.

door

R. Timman.

5. De stelling van Gauss.

Bij de bespreking van de beweging van vloeistoffen, die door een vectorveld wordt beschreven, treedt een nieuw begrip op, de divergentie van het veld.

Indien een hoeveelheid vloeistof op het tijdstip t een gebied T van de ruimte bezet, is het volume

$$V(t) = \iiint_T dx dy dz. \quad (1)$$

Wij hebben gezien dat wij op ieder tijdstip t de coördinaten van een deeltje kunnen uitdrukken in de plaats-coördinaten op het tijdstip t_0 : x_0, y_0, z_0 en de tijd. Om dus de tijd-afhankelijkheid van $V(t)$ te beschrijven, moeten wij x_0, y_0, z_0 en t als coördinaten invoeren in (1) en krijgen dan

$$V(t) = \iiint_{T_0} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} dx_0 dy_0 dz_0,$$

waarbij

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}$$

Om dit te vinden, beschouwen wij even de transformatie van het volume-elementje $dx_0 dy_0 dz_0$ met hoekpunten op het tijdstip t_0

$$\begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_0 + dx_0 & y_0 & z_0 \\ x_0 & y_0 + dy_0 & z_0 \\ x_0 + dx_0 & y_0 + dy_0 & z_0 \\ x_0 & y_0 & z_0 + dz_0 \end{array}$$

dat op het tijdstip t is overgegaan in

$$\begin{array}{lll}
 x & y & z \\
 x + \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 & y + \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 & z + \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 \\
 x + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 & y + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 & z + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 \\
 x + \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0} dy_0 & y + \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0} dy_0 & z + \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0 \\
 x + \frac{\partial x}{\partial z_0} dz_0 & y + \frac{\partial y}{\partial z_0} dz_0 & z + \frac{\partial z}{\partial z_0} dz_0
 \end{array}$$

en de inhoud van het parallelepipedum is

$$\begin{vmatrix}
 x & y & z & 1 \\
 x + \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 & - & - & 1 \\
 - & - & - & 1 \\
 - & - & - & 1
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
 \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 & \frac{\partial y}{\partial x_0} dx_0 & \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 \\
 - & - & - \\
 - & - & - \\
 - & - & -
 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} dx_0 dy_0 dz_0$$

Voor het tijdstip t_0 is de aangroeiing van het volume gedurende het tijdsverloop Δt gegeven door de formule

$$V(t_0 + \Delta t) - V(t) = \iiint_{T_0} \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} - 1 \right) dx_0 dy_0 dz_0.$$

Nu is op het ogenblik $t + \Delta t$

$$x = x + u \Delta t$$

$$y = y + v \Delta t$$

$$z = z + w \Delta t$$

zodat

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} - 1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial z_0} \right) \Delta t.$$

en

$$\frac{V(t_0 + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \iiint_{T_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial z_0} \right) dx_0 dy_0 dz_0$$

in de veronderstelling, dat de functies u , v en w continu differentieerbare functies zijn van x_0, y_0 en z_0 in het gehele interval Δt .

Bij de limiet vinden wij

$$\frac{dV}{dt} = \iiint_{T_0} \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial z_0} \right) dx_0 dy_0 dz_0,$$

zodat wij volgens de stelling van het gemiddelde mogen schrijven

$$\frac{\frac{dV}{dt}}{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

waarbij deze grootheid bepaald is in een punt binnen het gebied T_0 .

Indien wij nu dit gebied steeds kleiner nemen, vinden wij de plaatselijke relatieve toename van het volume

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\frac{dV}{dt}}{V}$$

Als de verandering van het volume overal nul is, is de vloeistof onsamendrukbaar en $\operatorname{div} v = 0$. Op deze wijze is een definitie van onsamen-drukbaar vloeistof verkregen.

De toename van het volume per tijdseenheid kunnen wij ook op een andere wijze berekenen.

Denk het begrenzende oppervlak benaderd door een ingeschreven veelvlak en denk dat over ieder zijvlak van dat veelvlak de snelheid constant in richting en grootte is. Dan stroomt in een tijd Δt door dat zijvlak een hoeveelheid vloeistof $\vec{V}_n \Delta S \Delta t$, waarbij V_n de component van de snelheid loodrecht op het oppervlak voorstelt. Na een tijd Δt zal dus de vloeistof, die op het tijdstip t in T lag een volume $V + \sum V_n \Delta S$ innemen, d.w.z.

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \sum \vec{V}_n \cdot \Delta S.$$

Indien nu het snelheidsveld continu is en indien de zijden van het veelvlak worden verkleind, zal de uitdrukking $\sum V_n \cdot \Delta S$ naderen tot de integraal

$$\iint_S \vec{V}_n dS$$

zodat de tweede uitdrukking voor de toename van het volume per tijdseenheid is

$$\frac{dV}{dt} = \iint_S \vec{V}_n dS.$$

Wij vinden dus de stelling van Gauss:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{V} dV = \iint_S \vec{V}_n dS.$$

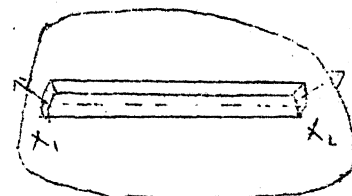
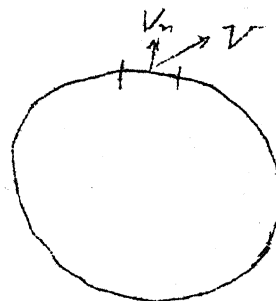
Wegens het grote belang van de stelling van Gauss geven wij hier nog een andere afleiding, die direct de twee integraaluitdrukkingen in elkaar omzet en wel voor een oppervlak, dat door iedere lijn // coördinaatassen slechts in twee punten wordt gesneden en daar een continu variërend raakvlak heeft.

Beschouw de integraal $\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dV =$

$$= \iint \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial X}{\partial x} dY dZ \right) = \iint [X(x_2, y, z) - X(x_1, y, z)] dY dZ$$

wanneer x_1 en x_2 de snijpunten voorstellen van een lijn $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. met het oppervlak. Noemen wij de oppervlakte-elementjes resp. dS_1 en dS_2 , dan is $dydz = -dS_1 \cos(n_1, x)$ en ook $dydz = dS_2 \cos(n_2, x)$, zodat wij krijgen

$$\iiint_V \frac{\partial X}{\partial x} dV = \iint_S [X(x_2, y, z) \cos(n_2, x) dS_2 + X(x_1, y, z) \cos(n_1, x) dS_1] = \iint_S X \cos(n, x) dS.$$



Door optellen van analoge uitdrukkingen voor alle drie componenten vinden we dan opnieuw de stelling van Gauss.

6. De flux, solenoidale velden.

De integraal $\iint_S \vec{V}_n \cdot d\vec{S}$ wordt voor het krachtveld de flux van het veld genoemd. Als deze voor ieder gesloten oppervlak nul is, spreken wij van een solenoidaal veld.

Deze voorwaarde is equivalent met de eis, dat in ieder punt de divergentie in het veld nul is.

Wij beschouwen nu een veld van een eindige massaverdeling en weten dan, dat voor een punt buiten de massa's

$$\begin{aligned} X &= \iiint_V \frac{\rho}{r^3} (x-x_p) dx dy dz, \\ Y &= \iiint_V \frac{\rho}{r^3} (y-y_p) dx dy dz, \\ Z &= \iiint_V \frac{\rho}{r^3} (z-z_p) dx dy dz. \end{aligned}$$

die uitdrukking voor de divergentie is dan

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V} &= \iiint_V \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x-x_p}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y-y_p}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z-z_p}{r^3} \right] dx dy dz = \\ &= \iiint_V \rho \left[\frac{3}{r^3} - 3 \frac{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2}{r^5} \right] dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

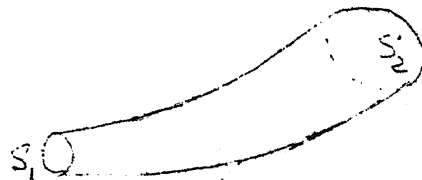
want in de eerste plaats mogen wij, omdat wij buiten de massa's zijn, differentieren onder het integraalteken en verder geldt

$$\frac{\partial r^2}{\partial x} = 2(x-x_p) = 2r \frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\text{zodat} \quad \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^5} (x-x_p).$$

Beschouw nu een gesloten kromme in het veld, die in een oppervlak ligt dat ongeveer loodrecht op de krachtlijn staat en de buis, die gevormd wordt door in alle punten van de kromme de krachtlijnen aan te brengen.

Beschouwen wij dan een tweede kromme, die in een oppervlak ligt, dat ongeveer loodrecht op de krachtlijnen staat, dan geeft de stelling van Gauss



$$\iint_{S_1} \vec{V}_n \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{V}_n \cdot d\vec{S}.$$

Indien nu S_1 en S_2 kleine oppervlakten A_1 en A_2 hebben, dan zal gelden (bij benadering)

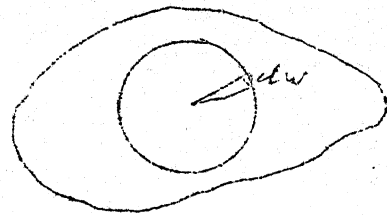
$$V_1 A_1 = V_2 A_2,$$

waarbij V_1 en V_2 de veldsterkten zijn in een punt, waar het oppervlak werkelijk loodrecht op de veldsterkte is.

Wij zien dus, dat het oppervlak van een krachtbuis omgekeerd evenredig is met de veldsterkte. De flux door een bol om een massapunt met massa

$$m \text{ is } - \iint \frac{m}{r^2} \cdot r^2 d\omega = -4\pi m,$$

als de normaal naar buiten is gericht en de kracht naar binnen. Voor ieder ander gesloten oppervlak is de flux even groot, zoals blijkt door de stelling van Gauss



toe te passen op de ruimte binnen dat oppervlak en buiten een bol, die het massapunt omsluit, maar zelf binnen het oppervlak blijft. Voor een eindig aantal massapunten blijft de stelling gelden en ook voor een continue verdeling binnen het oppervlak

$$\iint_S V_n dS = \iiint_V \rho \frac{(\xi-x)l + (y-\eta)m + (z-\zeta)n}{r^3} dV dS$$



Als (ξ, η, ζ) een punt is van V en

x, y, z een punt op S , terwijl l, m en n richtingscosinussen van de normaal op S voorstellen.

Daar $r \neq 0$ is, mogen wij de integraties verwisselen en krijgen dan

$$\begin{aligned} \iint_S V_n dS &= \iiint_V \rho \cdot \iint_S \frac{(\xi-x)l + (y-\eta)m + (z-\zeta)n}{r^3} dS \cdot dV = \\ &= -4\pi \iiint_V \rho dV = -4\pi M. \end{aligned}$$

als M de totale omsloten massa voorstelt.

Voor een vloeistofstroming stelt $\iint_S V_n dS$ de hoeveelheid vloeistof voor, die per tijdseenheid door het oppervlak stroomt. Wij kunnen dan zeggen, dat in het gebied V de vloeistof geabsorbeerd wordt en noemen dit een putgebied, de puntmassa's corresponderen dan met de puntputten, of als m negatief genomen wordt, puntbronnen.

7. De continuïteitsvergelijking voor de stroming van een incompressibele vloeistof.

Voor een incompressibele vloeistof hadden wij als definitie gekozen $\operatorname{div} v = 0$. Indien er echter bronnen in het veld zijn, gaat dit niet meer op. Wij mogen echter niet zeggen $\rho = \text{const.}$ (denk maar aan zeewater, waar de zoutconcentratie niet constant hoeft te zijn).

Wat constant is, is de dichtheid van de vloeistof in een bepaald volume-elementje.

Wij moeten dus de bewegingsvergelijkingen in de vorm van Lagrange gebruiken en de deeltjes identificeren door hun plaats op het tijdstip t_0 . Daar wordt de massa ook gegeven als functie $\rho(x, y, z, t)$ en de voorwaarde van constante dichtheid is

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

waarbij x_0, y_0, z_0 constant zijn.

Meestal duiden wij dit aan door te schrijven

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ of } \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

Indien wij nu ρ gegeven denken als functie van x, y, z en t , moeten wij eerst transformeren en opmerken dat voor een bepaald deeltje geldt

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$y = y(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$z = z(x_0, y_0, z_0, t),$$

waarbij x_0, y_0 en z_0 constant zijn, en dan het differentiaalquotient berekenen uit

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\text{Maar } \frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w,$$

zodat we krijgen als definitie voor onsamendrukbaarheid

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0.$$

Wij stellen nu de continuïteitsvergelijking op voor het geval, dat in het veld bronnen aanwezig zijn en wel in een continue verdeling $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$.

In een gebied T stroomt dus per seconde naar binnen een massa

$$\iiint_T \rho \sigma dV - \iint_S \rho v_n dS$$

De totale massa in T op het tijdstip t is

$$\iiint_T \rho dV$$

zodat

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_T \rho dV = \iiint_T \rho \sigma dV - \iint_S \rho v_n dS$$

waarbij de afgeleide een partieel differentiaalquotient is, waarbij x, y en z constant gehouden worden.

Daar wij ρ continu differentieerbaar hebben verondersteld, verwisselen wij links integratie en differentiatie en passen verder rechts het divergentietheorema toe op de vector $\rho \vec{v}$ en vinden dat voor ieder gebied T moet gelden

$$\iiint_T \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \sigma + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dV = 0$$

Dit kan alleen, als de integrand nul is, d.w.z.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \sigma + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Voor een incompressibele vloeistof geldt

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

zodat de continuïteitsvergelijking wordt

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{v} - \sigma = 0.$$

HOOFDSTUK II. De Potentialiaal.

1. De krachtfunctie.

Wij beschouwen nu de beweging van een massapunt met massa m in een krachtveld met componenten X , Y en Z . Door een geschikte keuze van de eenheden worden de bewegingsvergelijkingen

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = m Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = m Z.$$

Hieruit volgt, dat

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = m \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right)$$

en door integratie

$$T - T_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = m \int_{P_0}^P (X dx + Y dy + Z dz).$$

De verandering in kinetische energie gedurende een tijdsverloop t_0 tot t , is gelijk aan de arbeid, die door de kracht is verricht langs de weg van P_0 tot P , als op t_0 het punt in P_0 is en op t in P .

Indien deze arbeid onafhankelijk is van de weg, noemen wij het krachtveld conservatief:

De functie

$$W(P, P_0) = \int_{P_0}^P (X dx + Y dy + Z dz)$$

is dan alleen door het veld bepaald en is een functie bij vaste P_0 van de coördinaten x , y en z van P .

Dan is het duidelijk, dat de afgeleide in $W(P, P_0)$ in de richting van de x -as is

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{W(P) - W(P_1)}{PP_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} X(x, y, z) dx = X,$$

als P de x -coördinaat x heeft en P_1 de x -coördinaat $x + \Delta x$.

De afgeleide in een andere richting is

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{W(P) - W(P_1)}{\Delta s},$$

waarbij de verschillen in coördinaten tussen P en P_1 zijn

$$\Delta x = \Delta s \cdot l$$

$$\Delta y = \Delta s \cdot m$$

$$\Delta z = \Delta s \cdot n$$

indien l , m en n de richtingscosinussen zijn van de richting PP_1 .

Dan blijkt, dat het resultaat wordt

$$X_l + Y_m + Z_n,$$

d.w.z. juist de component om de kracht in deze richting. Dus van een conservatief krachtenveld bestaat een krachtfunctie W , zodat de kracht in een richting juist de afgeleide van de functie in deze richting is. Omgekeerd, indien een functie bestaat, zodat

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \text{ is}$$

$$W(P, P_0) = \int_{P_0}^P \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = \Phi(P) - \Phi(P_0).$$

De functie Φ is gelijk aan de krachtfunctie W op een additieve constante na.

Wij zeggen, dat de vector (X, Y, Z) is de gradient van de functie Φ en deze noemen wij de potentiaal.

Indien wij in het oneindige aannemen $\Phi = 0$, stelt Φ dus voor de arbeid, die het veld verricht als wij de massa m van het oneindige naar P brengen.

Wij zien nu, dat voor Newtonse krachtevelden een potentiaal bestaat, immers voor een massapunt is

$$X = \frac{x_p - x}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r},$$

$$Y = \frac{y_p - y}{r^3} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r},$$

$$Z = \frac{z_p - z}{r^3} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}, \text{ dus } \Phi = \frac{1}{r}$$

en voor een volumeverdeling geldt

$$\Phi(x_p, y_p, z_p) = \iiint_V \frac{\rho}{r} dx dy dz.$$

2. Dipolen.

Een magneet wordt gevormd door een positieve en een negatieve hoeveelheid magnetisme met dezelfde absolute waarde op zeer korte afstand van elkaar en het blijkt in de natuur niet mogelijk te zijn de afzonderlijke magneetpolen te isoleren.

Wij berekenen de bijbehorende potentiaal

$$U = \frac{m}{r'} - \frac{m}{r},$$

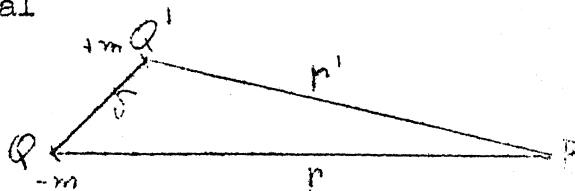
als r' en r de afstanden in de twee polen tot het punt P zijn.

Indien $Q' = \delta$ naar nul gaat, gaat

U naar nul, tenzij wij m laten aangroeien, zodat het product $m\delta = \mu$ constant blijft.

Dan wordt in de limiet

$$U = \mu \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}.$$



als α de richting van de lijn QQ' aangeeft.

Wij hebben dus niets anders te doen dan de potentiaal van een punt naar het punt, waar zich de massa bevindt in de richting van de as van de dipool te differentieren om de potentiaal van een dipool in dat punt te vinden.

$$U = \mu \left[\frac{l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0)}{r^3} \right]$$

als l , m en n de richtingscosinussen van de as zijn.

Beschouw nu een speciaal soort oppervlaktebelegging met dipolen, n.l. een belegging, waarbij de normalen op het oppervlak samenvallen met de assen van de dipolen, dan is de potentiaal

$$U = \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{r} \cdot dS,$$

als μ het moment van de dipool per oppervlakte-eenheid voorstelt. Wij kunnen deze formule gemakkelijk een meetkundige interpretatie geven.

Beschouw een oppervlakte-elementje ΔS en verbind de omtrek met het punt P , waar ik de potentiaal bepaal.

Dan passen wij het divergentietheorema toe op de vector.

$$X = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{r}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{r}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{r}$$

waarbij ξ, η en ζ lopende coördinaten zijn en x, y en z de coördinaten van P .

Als gebied kiezen wij het oppervlakte-elementje ΔS , de begrenzing van de kegel en een elementje van een boloppervlak op P met straal R .

Binnen het oppervlak is $\text{div } X = 0$ en langs de zijwanden is de richting van X juist tangentieel, zodat wij vinden

$$\iint_{\Delta S} \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{r} dS + \iint_{\Delta \Omega} \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{r} dS = 0$$

maar op de bol is $\frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}$.

zodat

$$\iint_{\Delta S} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \frac{1}{r} \right) dS = -\Delta \Omega$$

waarbij $\Delta \Omega$ de ruimtehoek voorstelt, waaronder ik uit P het element van de dubbellaag zie.

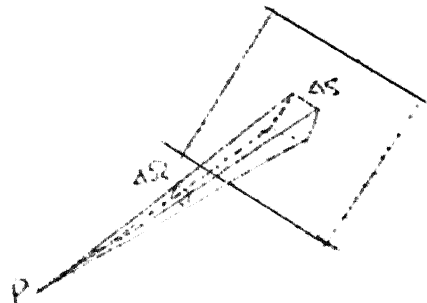
Wij vinden dus voor de totale potentiaal in P

$$U = \sum \mu \Delta \Omega$$

en bij steeds kleinere elementen

$$U = - \iint_S \mu d\Omega$$

waarbij de integratie over het gehele oppervlak wordt uitgestrekt.



Indien wij dus een gesloten gemagnetiseerd oppervlak hebben met constant moment, is voor een punt binnen het oppervlak

$$U = -4\pi\mu \quad \text{en daarbuiten } U = 0.$$

3. De circulatie van een stromingsveld.

De stelling van Stokes.

In een krachtveld had de integraal

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz)$$

de betekenis van de arbeid, die door de kracht werd verricht langs de doorlopen weg. Wat is de betekenis van deze grootte in een stromingsveld? Als het krachtveld conservatief is, is de integraal nul langs een gesloten kromme. Als deze eigenschap voor een stromingsveld geldt, noemen wij het stromingsveld rotatie-vrij.

Wij definiëren nu in een stromingsveld de circulatie langs een gesloten kromme C door

$$L = \oint_C (u dx + v dy + w dz) = \int_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

als $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ het scalaire product in de vectoren \vec{v} en $d\vec{s}$ voorstelt.

Beschouw eerst een zeer eenvoudige beweging, n.l. die, waarbij de vloeistof als een vast lichaam om een as roteert met constante hoek-

snelheid ω . Neem die as als z as, dan is de circulatie om een cirkel met straal a in het xy vlak

$$\omega a \cdot 2\pi a = 2\pi \omega a^2$$

Delen wij dit door het oppervlak, dan zien we, dat het resultaat 2ω afhankelijk is van de straal van de cirkel.

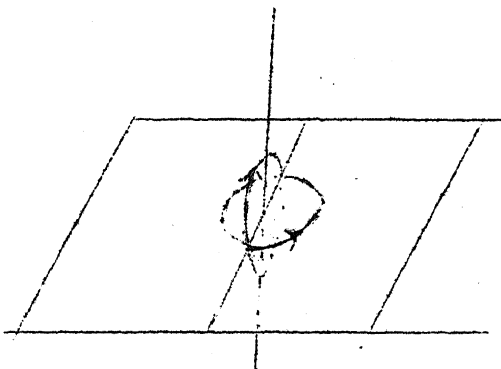
Neem nu een verticaal vlak, dan is de

lijnintegraal om een cirkel in dat vlak met straal a nul, onafhankelijk van de straal. Dit brengt ons ertoe om aan de circulatie in een punt een waarde toe te kennen (gewoonlijk wervelsterkte genoemd) en verder zien we, dat deze waarde afhangt van de stand van het oppervlakje, waarin de kromme (cirkel) ligt, die we op het punt samentrekken.

Wij definiëren nu de rotatie van een vector \vec{v} in een punt P op de volgende wijze.

De component van de rotatie in P in een richting n is de limiet van de circulatie, genomen langs een kromme in een vlak loodrecht op n (de omloopsrichting behorend bij de richting van n als een rechtse schroef) die P omsluit, gedeeld door het oppervlak van die kromme, indien wij de maximale koorde van de kromme tot nul laten naderen. Hierbij is dus verondersteld, dat deze limiet bestaat en tevens, dat zij onafhankelijk is van de vorm van de kromme, in formule

$$\text{rot } \vec{v} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{v} \cdot d\vec{s}}{A}$$



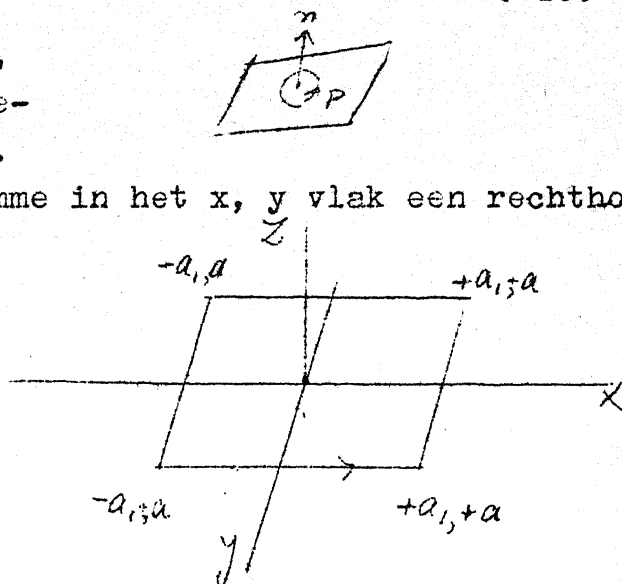
Neem even aan, dat dit het geval is,
dan kunnen wij de componenten bereke-
nen door de kromme te specialiseren.

Nemen wij de Z component en als kromme in het x, y vlak een rechthoek
met hoekpunten

$$-a_1 + a; +a_1 + a; +a_1 - a; -a_1 - a$$

dan is de circulatie

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^{+a} u(x+a, 0) dx + \int_{-a}^{+a} v(a, y, 0) dy + \\ & + \int_{+a}^{-a} u(x, -a, 0) dx + \int_{-a}^{+a} v(-a, y, 0) dy = \\ & = \int_{-a}^{+a} [u(x, +a, 0) - u(x, -a, 0)] dx + \int_{-a}^{+a} [v(a, y, 0) - v(-a, y, 0)] dy. \end{aligned}$$



Indien nu u en v continu zijn, mogen wij de middelwaardstelling toe-
passen en dit vervangen door

$$\{u(x', +a, 0) - u(x', -a, 0)\} 2a - \{v(a, y', 0) - v(-a, y', 0)\} 2a$$

en indien u en v verder continu differentieerbaar zijn kunnen wij hier
voor schrijven

$$\left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{P'} - \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{P''} \right\} 4a^2$$

waarbij P' en P'' zekere punten van het vierkant zijn.

Indien wij nu de zijden a van het vierkant naar nul laten gaan en door
 $4a^2$ delen vinden wij, dat de z component van de rotatie gelijk is aan

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

en analoog voor de x en y componenten

$$\text{rot } \vec{r} = \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

De samenhang tussen de rotatie van een vector en de circulatie langs
een gesloten kromme C wordt opgeleverd door het theorema van Stokes

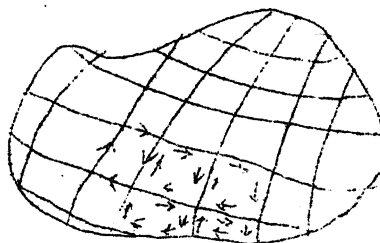
$$\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\text{rot } \vec{r})_n \cdot d\sigma$$

waarbij S een oppervlak is, dat door C begrensd wordt. Wij verdelen
daartoe het oppervlak in kleine
elementjes $\Delta\sigma$ en merken op dat
in een punt van dat elementje
de rotatie gedefinieerd is als

$$(\text{rot } \vec{r})_n = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{r} \cdot d\vec{s}}{\Delta\sigma_k}$$

Zodat wij kunnen schrijven, dat langs de omtrek van het elementje

$$\Delta\sigma_k \oint \vec{r} \cdot d\vec{s} = (\text{rot } \vec{r})_n \cdot \Delta\sigma_k + \epsilon_k \cdot \Delta\sigma_k.$$



waarbij ϵ_k naar nul gaat, als wij de maximale koorde van het elementje verkleinen.

Indien wij nu sommeren over alle elementjes, vallen juist de bijdragen van de gemeenschappelijke zijden van aangrenzende elementjes tot de lijnintegraal weg en wij verkrijgen

$$\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{s} = \sum (\text{rot } \vec{r})_n \Delta \sigma + \sum \epsilon_k \Delta \sigma_k$$

Indien nu ϵ de maximale waarde van de ϵ_k aanduidt is

$$\left| \oint_C \vec{r} \cdot d\vec{s} - \sum (\text{rot } \vec{r})_n \Delta \sigma \right| < \epsilon \left| \sum \Delta \sigma_k \right|$$

en bij de limiet

$$\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{s} = \oint_S (\text{rot } \vec{r})_n \cdot d\sigma$$

De circulatie om een gesloten kromme is gelijk aan de integraal over de normaalcomponent van de rotatie over een oppervlak, dat door de kromme wordt begrensd waarbij de normaalrichting en integratiezin bij elkaar behoren als bij een rechtse schroef.

Wij leiden deze stelling nog op een andere manier af en wel uit de stelling van Gauss in twee dimensies

$$\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (P dy - Q dx) = \oint_C (Pl + Qm) ds$$

Om dit te doen, herleiden wij slechts de termen met u in de te bewijzen betrekking

$$\oint_C (u dx + v dy + w dz) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) l + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) m + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) n \right\} d\sigma$$

en bewijzen, dat

$$\oint_C u dx = \iint_S \left(m \frac{\partial u}{\partial z} - n \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\sigma$$

Laat de vergelijking van het oppervlak zijn

$$z = f(x, y)$$

dan kunnen wij schrijven op het oppervlak

$$u(x, y, z) = \bar{u}(x, y)$$

$$\text{en } \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

Verder geldt voor de richtingscosinussen van de normaal

$$\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{l} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{m} = \frac{1}{n}$$

zodat op het oppervlak

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{m}{n}$$

Dan wordt

$$\iint_S \left(m \frac{\partial u}{\partial z} - n \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\sigma = - \iint_S \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot n \right\} d\sigma$$

Maar nu is $nd\vec{s} = d\vec{S}$ de projectie op het xy vlak zodat wij krijgen

$$\iint_S \left(m \frac{\partial u}{\partial z} - n \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\sigma = - \iint_S \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \cdot d\vec{S}$$

Pas nu de stelling van Gauss toe met $P=0$, $Q=\bar{u}$, dan vinden wij

$$- \iint_S \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} d\vec{S} = - \oint_C \bar{u} \cdot d\vec{s}$$

maar aangezien $\bar{u}=u$ is, is hiermede de eigenschap bewezen.

2de Boerhaavestraat 49

A m s t e r d a m 0.

Afd. Toegepaste Wiskunde.

Cursus:

Methoden der mathematische physica.

Deel I. Potentiaaltheorie en
conforme afbeelding.

door

R. Timman.

Bij de definitie van de rotatie in een punt hebben wij een kromme tot op dat punt samengetrokken. Een gebied, waarin dit voor iedere kromme mogelijk is, noemen wij een enkelvoudig samenhangend gebied, bijv. het gebied begrensd door een bol, kubus, ellipsoïde of twee concentrische bollen.

Anderzijds is een torus niet enkelvoudig samenhangend, want de cirkel gevormd door de middelpunten van de meridiaandoorsneden kan niet op een punt worden samengetrokken. Ik kan er een enkelvoudig samenhangend gebied van maken door een meridiaanvlak als coupure aan te brengen en die wegen uit te sluiten, die deze coupure snijden.

In een conservatief of rotatievrij veld in dit gecoupeerde gebied bestaat een potentiaal U , gedefinieerd

op een additieve constante na. Beschouw nu een gesloten kromme $P_1P_2P_3P_4$ beginnend in een punt aan de ene

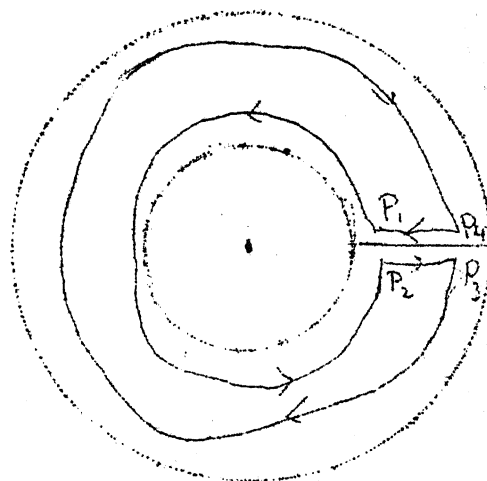
kant van de coupure en lopend tot het tegenoverliggende punt, dan een stuk langs de coupure en dan door de torus heen weer terug. In dit geval is de lijn-integraal $\int \vec{X} d\vec{s}$ langs de gehele kromme nul, dus

$$\int_{P_1}^{P_2} + \int_{P_2}^{P_3} + \int_{P_3}^{P_4} + \int_{P_4}^{P_1} = 0$$

Maar aan weerszijden van de coupure is \vec{X} hetzelfde, dus de integratie over P_2P_3 en P_1P_4 vallen weg, en wij vinden dat

$$\int_{P_1}^{P_2} = \int_{P_4}^{P_3}, \text{ d.w.z. het potentiaalverschil}$$

in tegenoverliggende punten van de coupure is constant. Bij een omloop neemt de potentiaal met een vast bedrag toe. De potentiaal is dus niet ondubbelzinnig bepaald, maar bevat een periode K , die ook nul kan zijn.



Bij meervoudig samenhangende gebieden is dus de potentiaal in het algemeen geen eenduidige functie van de plaats, zij bevat perioden.

4. De vectorpotentiaal.

Wij hebben gezien, dat in een rotatievrij veld de functie $\int_{P_0}^P \vec{v} \cdot d\vec{s}$ een potentiaalfunctie φ definieert, zodanig dat $\vec{v} = \text{grad } \varphi$.

In een divergentievrij veld, dat niet noodzakelijk rotatievrij hoeft te zijn, bestaat een analoog begrip.

Voor iedere vector \vec{a} geldt

$$\text{div rot } \vec{a} = 0$$

zoals gemakkelijk door uitschrijven blijkt.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\partial a_y}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{\partial a_x}{\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x} \right\} = 0$$

Als dus voor een vector \vec{v} geldt $\text{div } \vec{v} = 0$, rijst de vraag of een vector \vec{a} te bepalen is, zodanig dat

$$\vec{v} = \text{rot } \vec{a},$$

d.w.z. dat de gegeven veldlijnen de wervellijnen zijn van dat vectorveld \vec{a} .

Wij construeren eerst een bijzondere vectorpotentiaal met derde component 0. Noem de twee andere $a_x = f$ en $a_y = g$. Dan moet gelden

$$u = \frac{\partial g}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}$$

Hieraan kunnen we voldoen door

$$g = - \int_{z_0}^z u(x, y, z) dz,$$

$$f = \int_{z_0}^z v(x, y, z) dz + h(x, y)$$

Substitueer in de derde vergelijking

$$w(x, y, z) = - \int_{z_0}^z \frac{\partial v}{\partial y} dz - \frac{\partial h}{\partial y} - \int_{z_0}^z \frac{\partial u}{\partial x} dz$$

Daar $\text{div } \vec{v} = 0$ is, geldt

$$w(x, y, z) = -\frac{\partial h}{\partial y} + \int_{z_0}^z \frac{\partial w}{\partial z} dz = -\frac{\partial h}{\partial y} + w(x, y, z) - w(x, y, z_0)$$

dus

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial y} = -w(x, y, z_0)$$

waaraan we kunnen voldoen door

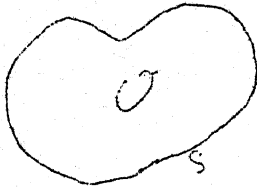
$$h(x, y) = - \int_{y_0}^y w(x, y, z_0) dy.$$

zodat een vectorpotentiaal geconstrueerd is. Hij is echter niet onduidelijk bepaald, immers, als wij er nog de gradient van een functie φ_0 bij optellen, verkrijgen wij nog dezelfde \vec{v} .

$$\vec{v} = \text{rot } \vec{a}_0 + \text{rot grad } \varphi_0 =$$

$$= \text{rot}(\vec{a}_0 + \text{grad } \varphi_0).$$

In het geval van een stroming kunnen wij een fysische interpretatie van de vectorpotentiaal geven door de hoeveelheid vloeistof te beschouwen die door een gesloten kromme stroomt. Leg een oppervlak door de kromme, dan stroomt per sec. door dat oppervlak



$$\iint_{\sigma} \vec{v}_n d\sigma = \iint_{\sigma} (\text{rot } \vec{a})_n d\sigma$$

Maar volgens de stelling van Stokes is dit gelijk aan $\int_S \vec{a} \cdot d\vec{s}$. Wij vinden dus, dat de hoeveelheid vloeistof, die door een kromme stroomt gelijk is aan de lijnintegraal van de vectorpotentiaal langs de omtrek van die kromme.

5. De differentiaalvergelijking voor de potentiaal.

Wij hadden gezien, dat voor een incompressibele vloeistof in stationaire stroming de continuïteitsvergelijking werd

$$\text{div } \vec{v} - \sigma = 0$$

als σ de bronsterkte voorstelde, d.w.z. de hoeveelheid vloeistof, die per sec. door de begrenzing van een volumeelementje Δv naar buiten stroomde gedeeld door het volume van dat elementje.

Het analogon voor krachtvelden van σ is dus $-4\pi\rho$. Indien nu het veld rotatievrij is, bestaat een potentiaal φ , zodanig, dat $\vec{v} = \text{grad } \varphi$ zodat φ in een veld met bronnen moet voldoen aan

$$\Delta\varphi = \text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Deze vergelijking staat bekend als de vergelijking van Poisson. Is het veld bovendien divergentievrij, dan geldt

$$\Delta\varphi = 0,$$

de vergelijking van Laplace.

Indien het veld divergentievrij is, maar niet rotatievrij, hadden wij gezien, dat wij het konden schrijven als de rotatie van een vectorpotentiaal \vec{a} , $\vec{v} = \text{rot } \vec{a}$.

Indien de rotatie van de vector \vec{v} gegeven is, $\text{rot } \vec{v} = \vec{\gamma}$, wordt dus de vergelijking voor \vec{a}

$$\text{rot rot } \vec{a} = \vec{\gamma}.$$

Nu is \vec{a} niet ondubbelzinnig bepaald, wij konden immers altijd de gradient van een potentiaal φ_0 toevoegen. Het is verstandig om dit zo te doen, dat de vectorpotentiaal \vec{a} voldoet aan de vergelijking $\text{div } \vec{a} = 0$. Dan moet, als wij \vec{a}_0 als boven gevonden hebben, φ_0 zo bepaald worden, dat

$$\text{div } \vec{a}_0 + \Delta\varphi_0 = 0$$

d.w.z. uit de vergelijking van Poisson.

Wij denken nu, dat dit gelukt is en nemen dus steeds aan, dat $\text{div } \vec{a} = 0$.
In dit geval wordt

$$\text{rot rot } \vec{a} = \Delta \vec{a} = -\vec{\gamma}.$$

zoals gemakkelijk door uit te schrijven blijkt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \{(\text{rot } \vec{a})_y\} - \frac{\partial}{\partial y} \{(\text{rot } \vec{a})_z\} &= \gamma_x = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial a_x}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} \right\} \\ &= -\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \right\} = \gamma_x \\ -\Delta a_x + \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{a} &= \gamma_x \quad -\Delta a_x = \gamma_x \end{aligned}$$

Elk van de componenten van de vectorpotentialaal voldoet dus aan de vergelijking van Poisson en bij afwezigheid van rotatie aan de vergelijking van Laplace.

De potentiaaltheorie hangt dus nauw samen met de studie van de vergelijkingen van Laplace en Poisson. Wij hebben gezien, dat iedere potentiaal van een eindige massaverdeling aan deze vergelijkingen voldoet; wij zullen later ook zien, dat iedere oplossing van de vergelijking van Laplace als de potentiaal van een zekere massabelegging kan worden opgevat.

Wij noemen functies, die aan de vergelijking van Laplace voldoen, harmonische functies.

6. De stellingen van Green.

Uit het divergentietheorema kunnen wij een aantal stellingen afleiden, die voor het vervolg van groot belang zijn.

Beschouw twee functies $u(x,y,z)$ en $v(x,y,z)$, die in een gebied V , begrensd door een oppervlak S continu zijn. Pas nu het divergentietheorema toe op de vector $\vec{F} = u \text{ grad } v$, met de formule voor de normale afgeleide van v

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} n_1 + \frac{\partial v}{\partial y} n_2 + \frac{\partial v}{\partial z} n_3 = \vec{n} \cdot \text{grad } v$$

Als n_1, n_2 en n_3 de richtingscosinussen van de normaal voorstellen vinden wij dan

$$\iiint_V \text{div}(u \text{ grad } v) dV = \iint_S u \text{ grad } v \cdot d\vec{v} = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

of wel

$$\iiint_V \{ \text{grad } u \cdot \text{grad } v + u \cdot \Delta v \} dV = \iint_S u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma.$$

Ook geldt

$$\iiint_V \{ \text{grad } u \cdot \text{grad } v + v \cdot \Delta u \} dV = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

zodat wij vinden

$$\iiint_V \{ u \Delta v - v \Delta u \} dV = \iint_S (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) d\sigma$$

Daar in de integralen op het oppervlak alleen de eerste afgeleiden optreden, kunnen wij de hypothesen over u en v wat verlichten. Het is voldoende, dat in het binnengebied van V de tweede afgeleiden van u en v continu zijn, terwijl de eerste afgeleiden continu tot zekere grenswaarden naderen. Om dit duidelijk te maken, construeren wij een oppervlak, dat binnen V ligt op kleine afstand van het oppervlak S en passen op dit gebied de stelling toe. Laten wij dan het binnenste oppervlak tot S naderen, dan volgt de geldigheid direct.

Door specialisering vinden wij nieuwe relaties

$$\underline{v=1} \quad \iiint_V \Delta u \, dV = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$$

Zijn u en v beide oplossingen van de vergelijking van Poisson, dan is

$$\Delta u = 4\pi\rho, \quad \Delta v = 4\pi\rho \quad \text{en wij vinden}$$

$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0$$

Ook de bovengenoemde eigenschap, dat we iedere harmonische functie als potentiaal van zekere massabeleggingen kunnen opvatten, kunnen we nu bewijzen.

Neem daarvoor $v = \frac{1}{r}$, waarbij $P(x,y,z)$ vast is en ξ, η, ζ integratievariabelen zijn

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}.$$

Indien nu P buiten V ligt, is steeds $\Delta v = 0$ en wij vinden

$$\iiint_V \frac{1}{r} \Delta u \, dV = \iint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\sigma$$

Indien u regulier harmonisch in V is, wordt dit

$$\iint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\sigma = 0$$

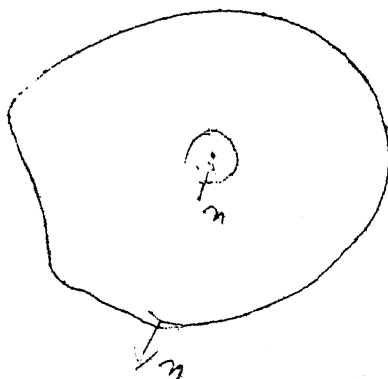
Als P echter in V ligt, gaan wij anders te werk. Daar $\frac{1}{r}$ in P singulier is, sluiten wij dit punt uit door een klein bolletje met straal δ en passen de stelling toe op het gebied V_δ , dat uit V ontstaat door het bolletje uit te sluiten. Dit geeft voor een functie u , die voldoet aan de vergelijking van Poisson

$$\Delta u = -4\pi\rho$$

$$\iiint_{V_\delta} \left(\frac{1}{r} \cdot \Delta u \right) dV =$$

$$\iint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\sigma + \iint_B \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} d\sigma$$

Op B geldt $r = \text{const} = \delta$ en $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$.



Voer nu weer bolcoördinaten in in het bolletje

$$\xi - x = r \cos \vartheta \cos \varphi$$

$$\eta - y = r \cos \vartheta \sin \varphi$$

$$\zeta - z = r \sin \vartheta$$

en op het bolletje

$$d\sigma = \delta^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

en in het bolletje

$$dv = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr$$

Dan geldt, als $\Delta u = -4\pi \rho$ continu is

$$- \iiint \frac{4\pi \rho}{r} dv = - \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} 4\pi \rho r \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr \rightarrow 0$$

als $\delta \rightarrow 0$ gaat, zodat de volume-integraal over V convergeert.

Verder is ook

$$\int_B \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \delta^{-2} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \rightarrow 0$$

daar $\frac{\partial u}{\partial n}$ continu is.

Tenslotte geldt op de bol

$$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r}) = \left[\frac{1}{r^2} \right]_{r=\delta} = \frac{1}{\delta^2}$$

en volgens de middelwaardestelling voor continue u

$$\iiint_B u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} u \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \bar{u} 4\pi.$$

waarbij \bar{u} de waarde van u ergens op de bol voorstelt. Indien wij $\delta \rightarrow 0$ laten gaan, nadert \bar{u} tot u_p en wij vinden als resultaat

$$4\pi u_p = \iint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right\} dS + 4\pi \iiint_V \frac{\rho}{r} dv$$

en in het bijzonder voor $\rho = 0$, dus u een harmonische functie

$$4\pi u_p = \iint_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right\} dS.$$

In het algemene geval stelt de eerste term een enkelvoudige oppervlak-tebelegging voor, de tweede een dipoolbelegging en de derde een ruimtebelegging.

Inderdaad is dus in V iedere harmonische functie voorgesteld als de potentiaal van een zekere massabelegging op de rand van V .

Cursus:

Methoden der mathematische physica.

Deel I. Potentiaaltheorie en
conforme afbeelding.

door

R. Timman.

Door specialisering kunnen wij uit de laatste formule nog een belangrijke stelling afleiden door haar toe te passen op een bol B met middelpunt P , indien u een harmonische functie in een gebied is, dat B bevat. Dan is

$$4\pi u_P = \iint_B \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{u}{R^2} \right\} dS$$

daar op de bol $r=R$ en $\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} = \left\{ \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} \right\}_{r=R} = -\frac{1}{R^2}$

Verder is voor een harmonische functie voor een gesloten gebied

$\iint_B \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, zoals wij direct uit het voorgaande kunnen vinden, zodat wij tenslotte krijgen

$$u_P = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_B u \cdot dS$$

de waarde van de harmonische functie in het middelpunt is het gemiddelde van de waarden op het boloppervlak.

Hieruit volgt ook direct, dat een harmonische functie, die geen constante is, in een bepaald gebied haar maximum of minimum alleen op de rand van dat gebied kan aannemen.

Hoofdstuk III.

De eigenschappen van de potentiaal in punten van de massa.

1. Het gedrag van een potentiaal in de vrije ruimte.

Wij hebben reeds gezien, dat in punten in de ruimte de tweede afgeleiden van de potentiaal, behorende bij een eindige massaverdeling bestaan. Wij laten ook nog zien, dat ook alle hogere afgeleiden bestaan. Voor de potentiaal van een massapunt is deze eigenschap evident, immers, de afgeleiden van de eerste orde zijn lineaire polynomen, gedeeld door r^3 en afgeleiden van de orde n zijn polynomen van de graad n gedeeld door r^{2n+1} , zoals blijkt door volledige inductie. Immers

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{P_n}{r^{2n+1}} = \frac{P'_n x}{r^{2n+1}} - (2n+1) \frac{P_n}{r^{2n+2}} \frac{x-x}{r} = \frac{P'_n x [r^2] - (2n+1) P_n (x-x)}{r^{2n+3}} = \frac{P_{n+1}}{r^{2n+3}}$$

Deze functies zijn continu voor alle punten waar $r \neq 0$ is. Door integratie over een eindige massaverdeling verandert deze eigenschap niet, zodat inderdaad alle afgeleiden continu blijven.

2. Het gedrag van een potentiaal in punten van de massa van een ruimtebelegging.

Wij hebben in het vorige hoofdstuk gezien, dat iedere oplossing voor de vergelijking van Poisson kon worden voorgesteld als de som van de potentiaal van een oppervlakte-belegging, van een dubbellaag en van een volumebelegging. Wij gaan nu het analytische gedrag van deze functies ter plaatse van deze beleggingen zoeken.

De potentiaal van een ruimtebelegging is gegeven door

$$u_P = \iiint_V \frac{P}{r} dV$$

uitgestrekt over het gebied V . Wij hebben reeds gezien, dat deze oneigenlijke integraal bestaat, zoals ook direct duidelijk wordt indien wij poolcoördinaten invoeren met P als middelpunt

$$u_P = \iiint \rho r \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Ook voor de afgeleiden verdwijnt de singulariteit op deze wijze bijv.:

$$\frac{\partial u_P}{\partial x_P} = \iiint_V \frac{P}{r^3} (x-x_P) dV = \iiint_V P \frac{x-x_P}{r} \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

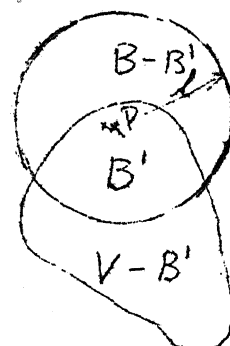
daar $\left| \frac{x-x_P}{r} \right| \leq 1$ is.

Om continuïteitseigenschappen van de potentiaal te bestuderen, hebben wij enkele stellingen nodig, die ons in staat stellen om schattingen te maken voor de potentiaal van een eindige massaverdeling. Wij zoeken een bovengrens voor de integraal $\iiint_V \frac{1}{r} dV$, uitgestrekt over een zeker volume V , onafhankelijk van de plaats van het punt P en alleen afhankelijk van het volume. Zoek een bol B met P als middelpunt met dezelfde inhoud als V , zodat zijn straal is $1 = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}$. Dan is voor elk punt P

$$\iiint_V \frac{1}{r} dV \leq 2\pi \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{2/3}$$

want, duiden wij met B' het gemeenschappelijke deel van B en V aan, dan is

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dV}{r} &= \iiint_{B'} \frac{dV}{r} + \iiint_{V-B'} \frac{dV}{r} \leq \\ &\leq \iiint_{B'} \frac{dV}{r} + \frac{1}{l} \iiint_{V-B'} dV = \iiint_{B'} \frac{dV}{r} + \frac{B-B'}{l} \end{aligned}$$



daar in $V-B'$ geldt $r \geq 1$ en $B=V$.

Verder is

$$\begin{aligned} \iiint_B \frac{1}{r} dV &= \iiint_{B'} \frac{dV}{r} + \iiint_{B-B'} \frac{dV}{r} \geq \iiint_{B'} \frac{dV}{r} + \frac{1}{e} \iiint_{B-B'} dV = \\ &= \iiint_{B'} \frac{dV}{r} + \frac{B-B'}{e} \end{aligned}$$

daar in $B-B'$ geldt $r \leq 1$.

Door combinatie van deze ongelijkheden vinden wij, dat

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dV}{r} &\leq \iiint_B \frac{dV}{r} = \int_0^{\ell} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{\ell^2}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 = 2\pi \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Op dezelfde manier bewijzen wij, dat

$$\iiint \frac{dV}{r^2} \leq 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}$$

Om nu te bewijzen, dat de potentiaal van een volumebelegging continu is in de punten van die belegging, beschouwen wij

$$U_P = \iiint_V e \frac{dV}{r}$$

waarbij P binnen of op V ligt.

Om de continuïteit aan te tonen, moeten wij laten zien, dat $|U_P - U_{P'}| < \varepsilon$ gemaakt kan worden voor iedere $\varepsilon > 0$ door $\overline{PP'}$ voldoende klein te nemen.

Laat P binnen V liggen en construeer een bol B om P met straal δ , die binnen V ligt, zodat

$$\left| \iiint_B e \cdot \frac{1}{r} dV \right| < \varepsilon/3$$

Dit kan, want als $|e| \leq e_{\max}$ is

$$\left| \iiint_B \frac{e}{r} dV \right| \leq e_{\max} \iiint_B \frac{1}{r} dV = e_{\max} 2\pi \delta^2$$

zodat wij δ altijd zo kunnen bepalen, dat aan de eis is voldaan.

Beschouw nu

$$U_P = \iiint_{B'} \frac{e}{r} dV + \iiint_{V-B} \frac{e}{r} dV = U_P^{(1)} - U_P^{(2)}$$

dan is $|U_P^{(1)}| < \varepsilon/3$, maar ook volgens de hulpstelling $|U_{P'}^{(1)}| < \varepsilon/3$, zodat steeds

$$|U_P^{(1)} - U_{P'}^{(1)}| < \frac{2\varepsilon}{3}$$

Voor $U_P^{(2)}$ is P een uitwendig punt, zodat de integraal daar zeker continu van P afhangt en wij dus altijd kunnen krijgen, dat

$$|U_P^{(2)} - U_{P'}^{(2)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

voor voldoende kleine $\overline{PP'}$, zodat wij onze stelling hebben bewezen. Als P op het oppervlak ligt, gaat het bewijs ook door, alleen moeten wij dan B door het deel dat in V ligt vervangen. De continuïteit van de afgeleiden, zoals

$$X = \iiint_V \rho \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} dV = \iiint_V \rho \frac{x-x_P}{r^3} dV.$$

wordt op analoge wijze bewezen door gebruik te maken van de tweede hulpstelling. Wij moeten echter nog laten zien, dat de differentiatie onder de integraal geoorloofd is. Om dit te bewijzen en tevens aan te tonen dat $X = \frac{\partial U_P}{\partial x_P}$, sluiten wij het punt P uit door een klein cylinder-

tje V_1 , straal δ met as evenwijdig aan de X-as en hoogte h en P in het middelpunt. Noem dan de integralen over het cylindertje $U^{(1)}$ en $X^{(1)}$ en over de rest $V-V_1=V_2$ $U^{(2)}$ en $X^{(2)}$.

Daar P een uitwendig punt is van V_2 , geldt

$$X^{(2)} = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x}$$

voor P en alle punten op de as.

Beschouw zo'n punt $P'(x',y,z)$, dan is

$$U^{(2)}(x,y,z) - U^{(2)}(x',y,z) = \int_{x'}^x X^{(2)}(t,y,z) dt$$

men merkt nu volgt uit onze hulpformules dat voor $\delta \rightarrow 0$ zowel $U^{(1)} \rightarrow 0$ als $X^{(1)} \rightarrow 0$, uniform voor alle punten in de nabijheid van P.

Daar dus $X^{(2)} \rightarrow X$ uniform, mogen wij de integratie en de limiet verwisselen, zodat $U(x,y,z) - U(x',y,z) = \int_{x'}^x X(t,y,z) dt$

waaruit volgt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X$$

3. Gedrag van een oppervlaktebelegging.

De potentiaal van een (bij gedeelten continue) oppervlaktebelegging van een oppervlak S met continu veranderlijke normaal is ook continu in de punten P van S.

$$U_P = \iint_S \frac{\sigma}{r} dS$$

Om dit te bewijzen, is nog een hulpstelling nodig. Kies een coördinatensysteem zodanig, dat de normaal in een punt Q van S parallel met de z-as is, zodat daar $\cos(n,z)=1$, dan kunnen wij, omdat n continu met het oppervlak verandert een gebied om Q afzonderen, zodat daar $\cos(n,z) > c$ voor een gegeven getal c met $0 < c < 1$. Als S binnen dat gebied ligt, is

$$\iint_S \frac{dS}{r} \leq \frac{2\pi}{c} \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{1/2}$$

waarbij ω de projectie van S op het xy -vlak is. Als r' de projectie is van r op het (x,y) -vlak en $d\omega$ de projectie van dS , dan is

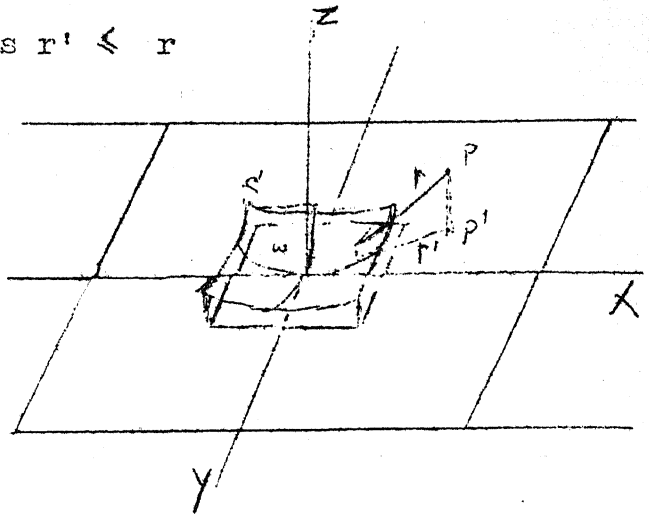
$$dS = \frac{d\omega}{\cos(x,z)} \leq \frac{d\omega}{c} \text{ en ook is } r' \leq r$$

zodat

$$\iint_{S'} \frac{dS'}{r} \leq \frac{1}{c} \iint_{\omega} \frac{d\omega}{r'}$$

Om ook deze integraal te schatten, maken wij gebruik van het twee-dimensionale analogon van de vroeger bewezen hulpstelling

$$\iint_{\omega} \frac{d\omega}{r'} \leq 2\pi \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^{1/2},$$



dat op precies dezelfde wijze wordt bewezen. Hieruit volgt direct het gewenste resultaat.

4. Gedrag van een dubbellaag.

In tegenstelling tot een enkele oppervlaktebelegging is de potentiaal van een dubbellaag discontinu op het oppervlak.

$$U_P = \iint_{S'} \sigma \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} dS = \iint_{S'} \frac{\sigma \cos(r,n)}{r^2} dS$$

waarbij r loopt van het punt Q van het oppervlak tot het punt P . Noem de hoek (r,n) γ , dan is

$$U_P = \iint_{S'} \frac{\sigma \cos \gamma}{r^2} dS$$

Wij hebben vroeger reeds gezien, dat, indien S een gesloten oppervlak is met constante dipoolmoment $\sigma = 1$, dat voor P binnen S :

$$U = \iint_S d\Omega = -4\pi$$

als de normaal naar buiten is gericht en voor P buiten S : $U=0$. Voor P op n hadden wij gevonden $U_P = -2\pi$. Indien nu in een punt A van het oppervlak $\sigma = \sigma_A$ dan schrijven wij:

$$U = \sigma_A \iint_S \frac{\cos \gamma}{r^2} dS + \iint_{S'} \frac{(\sigma - \sigma_A) \cos \gamma}{r^2} dS$$

of wel

$$U - \sigma_A \Omega = \iint_{S'} \frac{(\sigma - \sigma_A) \cos \gamma}{r^2} dS = f_P$$

en tonen aan, dat f_P continu is als P langs de normaal door A het oppervlak passeert.

Breng een bol B aan om A met straal δ , die uit S het stuk S_1 snijdt en noem

$$f_1 = \iint_{S_1} \frac{(\sigma - \sigma_A) \cos \delta}{r^2} dS, \quad f_2 = \iint_{S-S_1} \frac{(\sigma - \sigma_A) \cos \delta}{r^2} dS$$

Als $|\sigma - \sigma_A| < M$ op S_1 , is

$$|f_1| \leq M \iint_{S_1} \frac{|\cos \delta|}{r^2} dS \leq M \iint_S \frac{|\cos \delta|}{r^2} dS$$

en deze integraal is begrensd, daar zij weer samenhangt met de ruimtehoek, waaronder het oppervlak uit P gezien wordt. (Hier moeten echter steeds de absolute waarden van de afzonderlijke ruimtehoeken worden opgeteld). Nu gaat echter $M \rightarrow 0$ als wij S_1 steeds kleiner maken, zodat wij, onafhankelijk van de positie van P $|f_1|$ kleiner kunnen maken dan een willekeurig klein getal. Verder is f_2 een continue functie van P in de omgeving van A daar $S-S_1$ A niet bevat, zodat inderdaad $f=f_1+f_2$ continu is in A als functie van P. Indien S gesloten is, kunnen wij de waarden van Ω direct aangeven. Duiden wij met een -teken aan, dat de functies A van het inwendige uit benaderen en met een +teken, dat zij van het uitwendige komen en zetten wij voor de waarden op het oppervlak de index A, dan is $\Omega_- = -4\pi$ $\Omega_+ = 0$ $\Omega_A = -2\pi$, $f_- = f_A = f_+$, zodat

$$\text{dus } U_- + 4\pi \sigma_A = U_+ = U_A + 2\pi \sigma_A$$

$$\begin{cases} U_- = U_A - 2\pi \sigma_A \\ U_+ = U_A + 2\pi \sigma_A \end{cases} \quad \text{en} \quad U_A = \iint_S \frac{\sigma \cos \delta}{r_A^2} dS$$

Wij zien dus, dat in het punt A van het oppervlak de potentiaal een sprong $4\pi\sigma$ maakt als wij van de ene of van de andere kant komen.

5. Gedrag van de normale afgeleide van een oppervlaktebelegging.

Beschouw nu weer een oppervlaktebelegging met continue belegging van enkele polen

$$U_P = \iint_S \frac{\sigma}{r} dS$$

en kies op de normaal n_A in het punt A een positieve richting en laat het punt P langs de normaal bewegen. Zolang P niet op S ligt, kunnen wij differentiëren onder het integraalteken

$$\frac{\partial U_P}{\partial n_A} = \iint_S \sigma \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial n_A} dS$$

Wij onderzoeken nu de limiet van deze uitdrukking als P van de positieve of van de negatieve kant tot A nadert. Nu is

$$\frac{\partial r}{\partial n_A} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial n_A} + \dots = \cos(r, x) \cos(n_A, x) + \dots = \cos(n_A, r),$$

waarbij $r = (x_P - x_Q, \dots)$, (Q is het integratiepunt)

zodat

$$\frac{\partial U_P}{\partial n_A} = - \iint_S \frac{\sigma}{r^2} \cos(n_A, r) dS.$$

Wij schrijven nu

$$\frac{\partial U_P}{\partial n_A} = - \iint_S \frac{\sigma}{r^2} \cos(n_Q, r) dS + \iint_S \sigma \frac{\cos(n_Q, r) - \cos(n_A, r)}{r^2} dS = U_1 + U_2$$

en merken op, dat U_1 niets anders is dan de potentiaal van een dubbelbelegging, waarvoor wij zojuist gevonden hebben, dat

$$U_{1+} = E - 2\pi\sigma_A, \quad U_{1-} = E + 2\pi\sigma_A,$$

waarbij

$$E = - \iint_S \sigma \cdot \frac{\cos(r_A, n_Q)}{r_{QA}^2} dS$$

voorstelt de waarde van de potentiaal van de dubbellaag in het punt A. Wij laten nu zien, dat U_2 continu is als P door S heengaat langs de normaal in A en snijden weer een deel S_1 van S uit door een bolletje B met straal δ om A. Dan is

$$U_2 = \iint_B \sigma \frac{\cos(n_Q, r) - \cos(n_A, r)}{r^2} dS + \iint_{S-B} \sigma \frac{\cos(n_Q, r) - \cos(n_A, r)}{r^2} dS = J_1 + J_2$$

Noem het maximum van $|\sigma|$ op S N, dan is

$$|J_1| \leq N \iint_B \frac{|\cos(n_Q, r_{QP}) - \cos(n_A, r_{QA})|}{r^2} dS' \leq$$

$$\leq N \iint_B \frac{1 - \cos \alpha - \cos \beta}{r^2} dS' \leq N \iint_B \frac{2 \left| \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right| \left| \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right|}{r^2} dS' \leq$$

$$\leq 2N \iint_B \frac{\sin \frac{|\alpha - \beta|}{2}}{r^2} dS'.$$

Als we in Q een lijn trekken evenwijdig met n_A , dan ontstaat een drievlakshoek met ribben n_Q , n_A en r_{QP} , zodat $(n_A, n_Q) > (n_Q, r_{QP}) - (n_A, r_{QP})$

$$\text{en} \quad |J_1| \leq 2N \iint_B \frac{\sin \frac{1}{2}(n_A, n_Q)}{r^2} dS \leq N \iint_B \frac{\sin(n_A, n_Q)}{r^2} dS.$$

daar (n_Q, n_A) een kleine hoek is.

Om voor deze integraal een schatting te vinden, nemen wij A als oorsprong van een coördinatenstelsel met n_A als z-as, dan kunnen wij de vergelijking van het oppervlak schrijven als $\zeta = f(\xi, \eta)$. Indien de kromming continu is, heeft ζ continue afgeleiden van de eerste en tweede orde en is

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2 + 1}},$$

$$\sin \theta \leq \sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right)^2}$$

Daar in A $\frac{\partial \xi}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = 0$ is, is een a_2 zo te bepalen, dat

$$\left| \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \right| < a_2 (|\xi| + |\eta|) < 2a_2 r \text{ en } \left| \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right| < 2a_2 r$$

en dus is

$$|\eta| \leq a_1 \iint_B \frac{3a_2 r}{r^2} dS \leq a_3 \iint \frac{dS}{r}.$$

Deze integraal kunnen wij, onafhankelijk van de ligging van P zo klein maken als wij willen door δ voldoende klein te kiezen. Verder is F_2 continu, zodat wij de verandering in F_2 ook willekeurig klein kunnen maken. Hieruit volgt, dat U_2 continu is.

Wij vinden dus het resultaat

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_P}{\partial n_A} &= -2\pi \sigma_A - \iint_{S'} \sigma \frac{\cos(r_{QA}, n_Q)}{r_{QA}^2} dS' + \iint_S \sigma \frac{\cos(n_Q, r) \cos(n_A, r)}{r_{QA}^2} dS \\ &= -2\pi \sigma_A - \iint_S \sigma \frac{\cos(n_A, r_{QA})}{r_{QA}^2} dS \end{aligned}$$

en evenzo

$$\frac{\partial U_P}{\partial n_A} = 2\pi \sigma_A - \iint_A \sigma \frac{\cos(n_A, r_{QA})}{r_{QA}^2} dS'.$$

De normale afgeleide van de potentiaal van een dubbellaag behoeft in het geheel niet te bestaan. Indien echter een limiet van de afgeleide aan de positieve kant bestaat, kunnen wij op een dergelijke manier als hier bewijzen, dat ook de afgeleide aan de negatieve kant bestaat en dat deze twee afgeleiden gelijk zijn.

Indien σ op S niet alleen continu is, maar bovendien continue eerste en tweede afgeleiden heeft, is dit het geval.

Cursus:

Methoden der mathematische physica.

Deel I. Potentiaaltheorie en
conforme afbeelding.

door

R. Timman.

Hoofdstuk IV.

1. De logarithmische potentiaal.

Het analogon van de tot nu toe behandelde stellingen in het platte vlak is gebaseerd op de formule van de kracht, die een uniforme belegging van een lijn op een eenheidsmassa uitoefent.

Deze kracht is alleen afhankelijk van de afstand van de eenheidsmassa tot de lijn. Stel deze afstand r , dan is zij gegeven door

$$K = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r dz}{\sqrt{(r^2 + z^2)^3}} = \frac{\sigma}{r} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{2\sigma}{r}$$

als σ de massa per lengte-eenheid voorstelt.

Wij kunnen dus in het platte vlak de theorie opbouwen, gebaseerd op een krachtformule

$$K = \frac{mm'}{r} \quad (1)$$

en een bijbehorende potentiaal

$$U = m \cdot \log r. \quad (2)$$

en met voor de hand liggende wijzigingen kan de gehele voorgaande theorie overgenomen worden, waarbij wij er wel aandacht aan moeten besteden, dat in het oneindige deze potentiaal niet nul wordt.

De logarithmische potentiaal is in het algemeen gemakkelijker te behandelen dan de potentiaal van Newton, door haar nauwe verband met met de theorie der complexe functies.

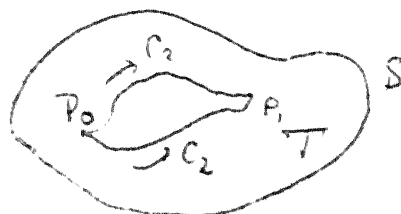
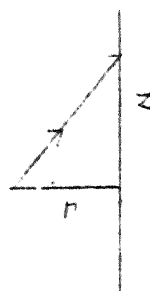
Beschouw daartoe in een gebied T , begrensd door een gesloten kromme S een reguliere potentiaalfunctie u . Dan is

$$\oint_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \quad (3)$$

en voor elke gesloten kromme C in T zonder dubbelpunten, die uit een eindig aantal bogen bestaat met continu veranderlijke raaklijn, geldt dan ook

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0. \quad (4)$$

Zijn nu P_0 en P_1 twee punten van T , verbonden door twee bogen C_1 en C_2 ,



dan is
$$\oint \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{C_2} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (5)$$

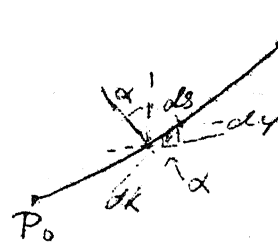
d.w.z. de functie $\int_{P_0}^P \frac{\partial u}{\partial n} d\cdot$ van de coördinaten x_1 en y_1 van P_1 is onafhankelijk van de integratieweg, mits deze in T ligt.

Wij schrijven

$$v(x,y) = - \int_{P_0}^P \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (6)$$

en merken op, dat langs de integratieweg

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \\ &= -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \end{aligned}$$



waarbij α de hoek is, die de raaklijn met de positieve x -as maakt.

Hieruit volgt

$$v(x,y) = \int_{P_0}^P \left(\frac{\partial u}{\partial x} ds \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} ds \cos \alpha \right) = \int_{P_0}^P \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \quad (7)$$

waaruit het duidelijk wordt dat

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (8)$$

Hieruit volgt, dat v voldoet aan de vergelijking van Laplace

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

Verder heeft v continue eerste afgeleiden en omdat u continue afgeleiden had van willekeurig hoge orde heeft v ze ook. v is dus evenals u in T een reguliere potentiaalfunctie, de geconjugeerde functie van u . De geconjugeerde potentiaal van v is $-u$, en verder is

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

waaruit volgt, dat de lijnen $u=\text{const.}$ en $v=\text{const.}$ loodrecht op elkaar staan. Wij kunnen dus de lijnen $u=\text{const.}$ opvatten als de krachtlijnen (stroomlijnen) van de equipotentiaallijnen $v=\text{const.}$ en omgekeerd.

In de hydrodynamica heet v de stroomfunctie; haar fysische betekenis is direct duidelijk: de hoeveelheid vloeistof, die per sec. stroomt tussen de stroomlijnen $v=v_1$ en $v=v_2$ is gegeven door $v_2 - v_1$.

De differentiaalvergelijkingen (8) zijn in de functietheorie bekend als de vergelijkingen van Cauchy-Riemann, die gelden tussen het reële en imaginaire deel van een analytische functie $f(z)$ van de complexe variabele $z=x+iy$.

Een functie $f(z)=u+iv$ is een analytische functie van de complexe variabele $z=x+iy$, als zij in ieder punt een continue afgeleide bezit

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

die onafhankelijk is van de weg waarlangs we Δz naar nul laten gaan.

Stel

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y = \Delta x(1+ti) = \Delta y(i+\frac{1}{t}),$$

waarbij t constant is, terwijl $\Delta x \rightarrow 0$ en $\Delta y \rightarrow 0$.

is

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) + i(v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y))}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left\{ \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y+\Delta y)}{\Delta x(1+it)} + \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y(i+1/t)} + \right.$$

$$+ i \frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y+\Delta y)}{\Delta x(1+it)} + i \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y(i+1/t)} \Bigg\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{1+it} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{i+1/t} + \right.$$

$$i \frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{1+it} + i \frac{\partial v}{\partial y} \frac{1}{i+1/t} \Bigg\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \frac{1}{1+it} + \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \frac{1}{i+1/t}$$

Dit kan dan en alleen dan onafhankelijk zijn van t , indien

$$- \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{i}{(1+it)^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{1}{(i+1/t)^2 t^2} \equiv 0$$

of

$$i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

waaruit de vergelijkingen van Cauchy-Riemann volgen en tevens de omgekeerde bewering.

In dit geval zien we ook, dat

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

2. Conforme transformatie.

Indien $w=u+iv=f(x+iy)$ een analytische functie is van $z=x+iy$, die regulier is in de omgeving van een punt z_0 en dus een ondubbelzinnig bepaalde afgeleide heeft in deze omgeving. Indien deze afgeleide niet nul is, wordt een conforme afbeelding verkregen van het vlak met coördinaten x en y op het vlak met coördinaten u en v , d.w.z., dat de hoek tussen twee lijnelementen dz_1 en dz_2 in het z -vlak overgaat in dezelfde hoek tussen de beelden van deze lijnelementen in het w -vlak.

Immers,

$$\Delta w_1 = f'(z_0) \cdot \Delta z_1 + \sigma_1$$

$$\Delta w_2 = f'(z_0) \cdot \Delta z_2 + \sigma_2$$

waarbij σ_1 en σ_2 grootheden zijn, zodanig, dat

$$\frac{\sigma_1}{\Delta z_1} \rightarrow 0 \text{ en } \frac{\sigma_2}{\Delta z_2} \rightarrow 0 \text{ bij de limiet.}$$

De hoek tussen de beeldelementen Δw_1 en Δw_2 is gegeven door

$$\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta w_1} = \arg \frac{f'(z_0) \Delta z_2 + \sigma_2}{f'(z_0) \Delta z_1 + \sigma_1} =$$

$$\arg \frac{f'(z_0) + \sigma_2/\Delta z_2}{f'(z_0) + \sigma_1/\Delta z_1} \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} = \arg \frac{f'(z_0) + \sigma_2/\Delta z_2}{f'(z_0) + \sigma_1/\Delta z_1} + \arg \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1},$$

Bij de limietovergang gaat de eerste term naar 0 en de stelling is bewezen. Wij kunnen zeggen, dat elk van de lijnelementen bij de conforme transformatie gedraaid wordt over dezelfde hoek, die gegeven wordt door $\arg f'(z) = \operatorname{Re} \log f'(z)$.

Ook het reële deel $\log f'(z)$ heeft een aanschouwelijke betekenis, immers

$$\left| \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \right| = \left| f'(z_0) + \sigma_1 \right| \quad \text{en}$$

$$\left| \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \right| = \left| f'(z_0) + \sigma_2 \right|$$

dus in de limiet zijn beide verhoudingen gelijk.

Wij kunnen dus zeggen, dat de drie hoekjes, die door de infinitesimale elementjes gevormd worden in beide vlakken gelijkvormig zijn en dat de gelijkvormigheidsfactor wordt gegeven door $|f'(z_0)|$ waarvan de logaritme is $\operatorname{Re} \log f'(z)$.

Het is nu gemakkelijk in te zien, dat de complexe functie van w $\Phi(w)$ invariant is bij de conforme transformatie, immers $\Phi(w) = \Phi\{f(z)\}$ heeft in de toegevoegde punten dezelfde waarde.

Stel nu $\Phi(w) = \varphi(u, v) + i \psi(u, v)$, dan hebben ook φ en ψ in toegevoegde punten in het w - en z -vlak dezelfde waarde, d.w.z. de lijnen $\varphi = \text{const.}$ en $\psi = \text{constant}$ in beide vlakken corresponderen met elkaar.

De correspondentie tussen de afgeleiden van deze functie wordt gegeven door

$$\frac{d\Phi(w)}{dz} = \frac{d\Phi(w)}{dw} \cdot f'(z)$$

Cursus:

Methoden der mathematische physica.

Deel I. Potentialtheorie en
conforme afbeelding.

door

R. Timman.

3. Integratie van een analytische functie, de stelling van Cauchy.

Beschouw nu de integraal van een regulier analytische functie

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

tussen de punten P_0 en P_1 :

$$\int_{P_0}^{P_1} f(z) dz = \int_{P_0}^{P_1} \{ (u dx - v dy) + i(u dy + v dx) \} .$$

Nu is volgens het tweedimensionale divergentietheorema voor een gesloten kromme

$$\oint (u dx - v dy) = - \iint \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dS$$

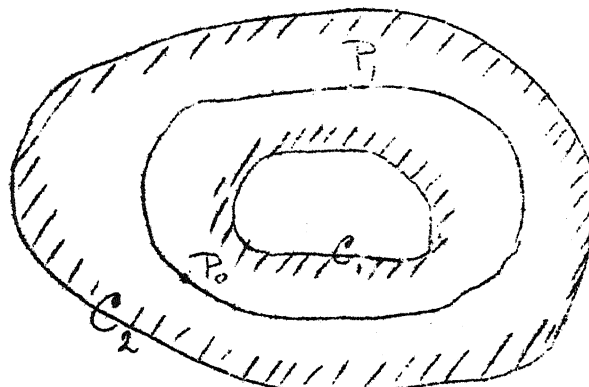
en

$$\oint (u dy + v dx) = - \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dS .$$

Hieruit volgt, dat $\int_{P_0}^{P_1} f(z) dz$ bij vaste P_0 onafhankelijk van de weg, die van P_0 naar P_1 voert alleen afhangt van de coördinaten van P_1 , mits twee beschouwde wegen een gebied omsluiten, waar u en v regulier zijn. Op deze wijze is dus bij een regulier analytische functie $f(z)$ een andere regulier analytische functie gedefinieerd,

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz .$$

Indien het regulariteitsgebied tweevoudig samenhangend is behoeft de stelling niet te gelden. Wij kunnen dan wel analoog aan vroeger aantonen, dat de integraal langs de binnenste randkromme C_1 gelijk moet zijn aan de integraal langs de buitenste randkromme C_2 en ook dat de integraal voor iedere kromme, die het binnengebied een keer omsluit, dezelfde waarde heeft. In een speciaal geval kunnen wij deze waarde aangeven.



Beschouw een enkelvoudig samenhangend gebied, waarbinnen $f(z)$ regulier analytisch is, en daarbij

$$\oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

waarbij z_0 een punt in G is en de integratieweg C wordt uitgestrekt over een kromme, die z_0 omsluit.

Door z_0 en een willekeurig kleine omgeving buiten te sluiten, gaat G over in een tweevoudig samenhangend gebied G' , waarbinnen

$$\frac{f(z)}{z-z_0}$$

analytisch is.

Wij weten al dat de integraal langs C dan gelijk is aan de integraal langs een kleine cirkel met straal δ en middelpunt z_0 , die de uitgesloten omgeving bevat. Op deze cirkel is

$$z = z_0 + \delta e^{i\varphi}$$

$$f(z) = f(z_0 + \delta e^{i\varphi}).$$

Nu is wegens de continuïteit van $f(z)$ voor voldoende kleine δ

$$|f(z_0 + \delta e^{i\varphi}) - f(z_0)| < \varepsilon$$

bij gegeven ε , dus

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = i \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \delta e^{i\varphi})}{\delta e^{i\varphi}} \delta e^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\varphi}) d\varphi$$

en verder

$$\left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{i\varphi}) d\varphi - \int_0^{2\pi} f(z_0) d\varphi \right| = \left| \int_0^{2\pi} \{f(z_0 + \delta e^{i\varphi}) - f(z_0)\} d\varphi \right| < 2\pi\varepsilon$$

zodat

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) + 2\pi y$$

waarbij $|y| \leq \varepsilon$. Laten wij $\delta \rightarrow 0$ gaan, dan convergeert het rechterlid tot $2\pi i f(z_0)$, het residu van de functie $\frac{f(z)}{z-z_0}$. Hiermede is dan de stelling van Cauchy bewezen, die het mogelijk maakt de waarde van een analytische functie in het inwendige van een gebied, waar zij regulier analytisch is, uit te drukken in haar randwaarden,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

4. De reeksen van Taylor en van Laurant.

Behalve de waarde $f(z)$ is het ook mogelijk de waarden van de afgeleiden in het punt z te bepalen. Beschouw daartoe

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{h} \left\{ -\frac{1}{t-z} + \frac{1}{t-z-h} \right\} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)} dt$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)(t-z-h)} dt.$$

waarbij de integratieweg de punten z en $z+h$ omsluit. Bij de limietovergang $h \rightarrow 0$ nadert de tweede integraal tot nul en wij vinden

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t-z)^2}.$$

In het algemeen bewijst men door volledige inductie

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

Wij leiden hieruit direct de formule voor de reeks van Taylor af.

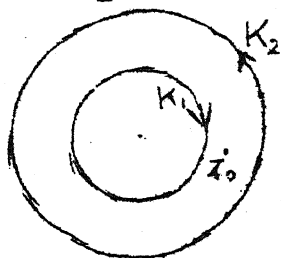
Indien z_0 een vast punt is in het inwendige van C , dan is

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} dt.$$

Indien $\left| \frac{z-z_0}{t-z_0} \right| < 1$ is, d.w.z. als z ligt binnen een cirkel met middelpunt z_0 , die geheel binnen C ligt, kunnen wij de integrand in een gelijkmatig convergente reeks ontwikkelen en vinden na integratie

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z_0} \left(1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^2 + \dots \right) dt = \\ &= f(z_0) + \frac{1}{1!} f'(z_0) (z-z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0) (z-z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

voor alle waarden van z binnen de cirkel met z_0 als middelpunt. Een generalisatie van deze reeks krijgen wij door het geval te beschouwen, dat $f(z)$ regulier is in een gebied, dat door twee concentrische cirkels K_1 en K_2 wordt begrensd. In dit ringgebied levert de integraalformule



van Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

waarbij zo te integreren is, dat het ringgebied steeds aan de linkerkant ligt. Op K_2 zetten wij:

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{t-z_0}} = \frac{1}{t-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{t-z_0} \right)^n$$

en op K_1

$$\frac{1}{t-z} = - \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t-z_0}{z-z_0}} = - \frac{1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t-z_0}{z-z_0} \right)^n$$

Dan ontstaat door integratie term voor term de reeks

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{(t-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

Waarbij C een willekeurige enkelvoudige gesloten kromme om z_0 is in het ringgebied.

5. De randwaardeproblemen van de potentiaaltheorie voor de cirkel. (probleem van Dirichlet).

Het eerste randwaardeprobleem van de potentiaaltheorie kan beschreven worden als:

Bepaal een oplossing van de vergelijking van Laplace $\Delta u=0$, die in een gegeven gebied G , begrensd door een rand S met continu variërende raaklijn regulier is en op de rand S gegeven waarden f aanneemt.

Het tweede randwaardenprobleem (probleem van Neumann) is:

Bepaal een oplossing van de vergelijking van Laplace $\Delta u=0$, die in een gegeven gebied G , begrensd door een rand S met continu variërende raaklijn regulier is, terwijl zij in het gehele gebied, met inbegrip van de rand continu is, evenals haar normale afgeleide, die op de rand tot voorgeschreven waarden f moet naderen. Daar voor een regulier harmonische functie geldt $\int \frac{\partial u}{\partial n} ds=0$ moet de gegeven functie f voldoen aan de voorwaarde $\int_S f ds=0$.

Indien het gebied G met de rand S gevormd worden door het inwendige en de omtrek van een cirkel C met straal R kunnen wij deze twee problemen direct oplossen.

Volgens de stelling van Cauchy is voor

een inwendig punt

$z=re^{i\varphi}=x+iy$ van de cirkel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \cdot \frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - ze^{i\psi}} d\varphi.$$

indien $f(z)$ regulier is binnen en op de cirkel.

Beschouw verder een punt z^* buiten de cirkel

$z^* = \frac{R^2}{z} = \frac{R^2}{r} e^{i\psi}$, dan is $\frac{f(z)}{z-z^*}$ regulier binnen en op de cirkel, dus

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{t-z^*} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \cdot \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\psi}} d\varphi.$$

Door aftrekken verkrijgen we

$$f(z) = u+iv = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) \cdot \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr \cos(\varphi-\psi)+r^2} d\varphi,$$

waaruit door gelijkstellen van reële en imaginaire delen volgt

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cdot \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr \cos(\varphi-\psi)+r^2} d\varphi$$

en

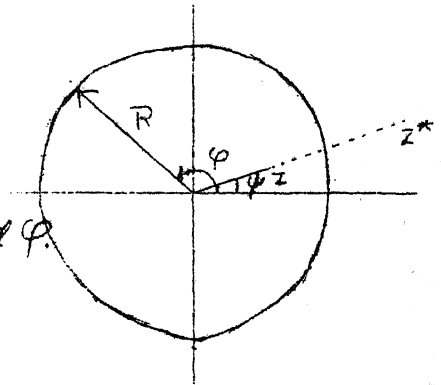
$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(R, \varphi) \cdot \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr \cos(\varphi-\psi)+r^2} d\varphi,$$

die het dus mogelijk maakt de waarde van de harmonische functies u en v in een punt in het inwendige van de cirkel uit te drukken in hun randwaarden. Door $r=0$ te stellen vinden wij weer de stelling van het arithmetische gemiddelde terug.

Deze integraal staat bekend als de integraal van Poisson.

Het is ook mogelijk om de geconjugeerde functie v in het inwendige van de cirkel uit te drukken in de randwaarden van u . Door optellen verkrijgen wij

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u(R, \varphi) + iv(R, \varphi)\} \cdot (1+i \frac{2Rr \sin(\varphi-\psi)}{R^2-2Rr \cos(\varphi-\psi)+r^2}) d\varphi.$$



Daar wij gezien hebben, dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(R, \varphi) d\varphi = v(0),$$

verkrijgen wij

$$v(r, \psi) = v(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cdot \frac{Rr \sin(\psi - \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\varphi.$$

Wij kunnen ook gebruik maken van de reeksontwikkelingen door te schrijven

$$\begin{aligned} u + iv &= u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cdot \frac{R^2 - r^2 + 2iRr \sin(\psi - \varphi)}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi)} d\varphi = \\ &= u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{R^2 - r^2 + Rr [e^{i(\psi - \varphi)} - e^{-i(\psi - \varphi)}]}{R^2 + r^2 - Rr [e^{i(\psi - \varphi)} + e^{-i(\psi - \varphi)}]} d\varphi \\ &= u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{Re^{i\varphi} + ze^{i\psi}}{Re^{i\varphi} - ze^{i\psi}} d\varphi = u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \frac{t+z}{t-z} d\varphi \end{aligned}$$

Na ontwikkeling van de breuk in de, voor $r < R$ gelijkmatig convergente reeks

$$\frac{t+z}{t-z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{t}\right)^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\psi - \varphi)}$$

kunnen wij term voor term integreren en krijgen dan

$$f(z) = u(r, \psi) + iv(r, \psi) = u(0) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \alpha_n e^{in\psi}$$

waarbij

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = a_n + ib_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

zodat

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \cos n\varphi d\varphi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

In dit geval vinden wij voor u en v de geconjugeerde Fourier-reeksen

$$u(r, \psi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi).$$

$$v(r, \psi) = v(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (-b_n \cos n\psi + a_n \sin n\psi)$$

Deze beschouwingen hebben echter alleen betrekking op het geval, dat $f(z)$ in de gehele cirkel met inbegrip van de rand bekend is en geven relaties tussen de waarde van de functie in en inwendig punt en haar randwaarden.

Het is echter ook mogelijk te bewijzen, dat indien $g(\varphi)$ een willekeurige continue functie is van φ met periode 2π , de integralen

$$u(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cdot \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\varphi$$

en

$$v(r, \psi) = v(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{Rr \sin(\psi - \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\psi - \varphi) + r^2} d\varphi$$

in het binnengebied van de cirkel een reguliere potentiaalfunctie u en haar geconjugeerde v voorstelt, terwijl u voor de waarden $g(\varphi)$ nadert als het inwendige punt tot de rand nadert. Dit bewijs is gebaseerd op de stelling, dat de functie $g(\varphi)$ in een convergente Fourier-reeks ontwikkeld kan worden.

De eerste formule levert dus de oplossing van het probleem van Dirichlet voor de cirkel, de tweede geeft de oplossing van het probleem van Neumann. Immers, als wij op de cirkel $\frac{\partial v}{\partial n} = h(\varphi)$ omschrijven, waarbij $\int_0^{2\pi} h(\varphi) \cdot d\varphi = 0$, geven wij ook de waarde van $u = R \int_0^\varphi h(\psi) \cdot d\psi = g(\varphi)$, d.w.z. de waarde van de geconjugeerde functie $u(r, \varphi)$ van $\sigma(r, \varphi)$ op de cirkel.

6. Het begrip hoofdwaaarde van een divergente integraal.

Indien wij met behulp van de tweede integraalformule de waarden van v op de cirkel willen berekenen, verkrijgen wij voor $r=R$

$$v(r, \varphi) - v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi) d\varphi,$$

d.w.z. een divergente integraal, die volgens de gebruikelijke integraaldefinitie niet bestaat.

Wij zullen daarom dit type van singuliere integralen iets nader beschouwen, en bewijzen, dat, indien $g(x)$ in een afgesloten interval $a \leq x \leq b$ een functie is met continue eerste en tweede afgeleiden (niet noodzakelijk analytisch), en $a < x_0 < b$ de limiet

$$H(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{g(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{g(x)}{x - x_0} dx \right).$$

bestaat. Het bewijs volgt uit de stelling van Taylor, n.l.

$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)h(x, x_0)$, waarbij $h(x, x_0)$ een continue functie is van x en x_0 .

Dan is

$$H(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(x_0) \left\{ \int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{dx}{x - x_0} + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{dx}{x - x_0} \right\} + \int_a^b h(x, x_0) dx$$

en

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{dx}{x - x_0} + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{dx}{x - x_0} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\ln \frac{x_0 - a}{\varepsilon} + \ln \frac{b - x_0}{\varepsilon} \right\} = \ln \frac{b - x_0}{x_0 - a}$$

Dit begrip kunnen wij ook direct overdragen op complexe functies.

Zij C een boog van een kromme met continue kromtestraal waarbij $t = \xi + i\eta$ dus een complexe functie met continue tweede afgeleiden is van de booglengte s , waarvoor dus $|t'(s)| = 1$ is. Is nu $f(t)$ een functie van t , die als wij t door $t(s)$ vervangen continue eerste en tweede afgeleiden bezit. ($f(t)$ behoeft dus niet analytisch te zijn).

Dan definiëren wij als hoofdwaaarde van Cauchy

$$H.W. \int_C \frac{f(t)}{t - t_0} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{s_0 - \varepsilon} \frac{f(t)}{t - t_0} t' ds + \int_{s_0 + \varepsilon}^b \frac{f(t)}{t - t_0} t' ds \right)$$

en bewijzen dat deze limiet bestaat.

Immers

$$t - t_0 = (s - s_0) \cdot t'(s_0) \left\{ 1 + (s - s_0) \alpha_1(s, s_0) \right\} \quad \text{dus voor voldoende kleine } (s - s_0): \frac{1}{t - t_0} = \frac{1}{(s - s_0) t'(s_0)} \cdot \left\{ 1 + (s - s_0) \alpha_1(s, s_0) \right\}$$

waarbij α_1 en α_2 continue functies zijn van s en s_0 . Verder is

$$f(t) = f(t_0) + (s - s_0) \alpha_3(s, s_0)$$

zodat de integrand wordt

$$\frac{\varphi(t_0)}{t'(s)} \frac{t'(s)}{s - s_0} + \alpha_4(s, s_0).$$

en dus na splitsing in reeel en imaginair deel voldoet aan de eisen, die voor het bestaan van een reële hoofdwaaarde was vereist.

Wij definiëren nu de complexe formule $f(z)$ door de formule

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(t)}{t-z} dt.$$

voor ieder punt z , dat niet op C ligt, voor een punt $z=t_0$ op C definiëren wij de functie door de hoofdwaaarde $h(t_0)$ van de integraal.

Wij duiden verder door $f^+(t_0)$ en $f^-(t_0)$ de limietwaarden van $f(z)$ aan, als ze bestaan, die we krijgen door langs de normaal in het punt t_0 op C van de positieve of negatieve kant tot t_0 te naderen. Dan bewijzen we, dat deze inderdaad bestaan en gegeven zijn door

$$f^+(t_0) = h(t_0) + \frac{1}{2} \varphi(t_0)$$

$$f^-(t_0) = h(t_0) - \frac{1}{2} \varphi(t_0)$$

Voor het bewijs nemen wij het punt t_0 als oorsprong en de raaklijn aan C als x -as van assenstelsel, de y -as nemen wij als positieve normaal.

Daar alleen de omgeving van de oorsprong kritiek is, nemen wij aan,

dat de raaklijn aan C nergens een hoek groter dan een vaste waarde

α ($-\pi/2 < \alpha < \pi/2$) met de x -as maakt en schrijven nu voor de punten op de y -as:

$$2\pi i f(z) = 2\pi i f(iy) = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{t-iy} t' ds = G(\varepsilon, y) + H(\varepsilon, y).$$

waarbij, voor voldoende kleine ε :

$$G(\varepsilon, y) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t-iy} t' ds, \quad H(\varepsilon, y) = \int_a^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^b \dots$$

Voor $|s| > \varepsilon$ is $|t-iy| > c\varepsilon$, waarbij c onafhankelijk is van ε .

Hieruit volgt voor willekeurige y_1 en y_2

$$|H(\varepsilon, y_1) - H(\varepsilon, y_2)| < \int_a^b \frac{|\varphi(t)|}{c^2 \varepsilon^2} |y_1 - y_2| ds < c \frac{|y_1 - y_2|}{\varepsilon^2}$$

Verder is op C

$$\varphi(t) = \varphi(0) + s\beta_1(s),$$

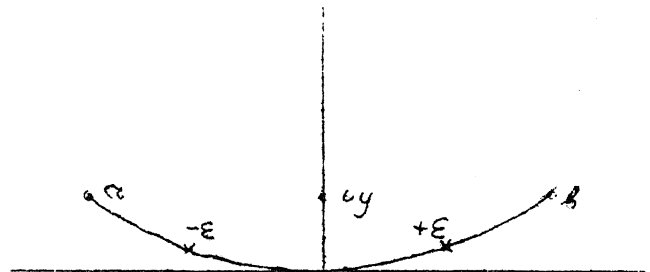
$$t = s' + s'^2\beta_2(s)$$

$$t' = 1 + s\beta_3(s)$$

waarbij $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ continu zijn in s .

Dus

$$\begin{aligned} G(\varepsilon, y) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(0) + s\beta_1(s)}{s-iy + s^2\beta_2(s)} (1 + s\beta_3(s)) ds = \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{s-iy} ds + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(s-iy)s\beta_4(s) + s^2\beta_5(s)}{(s-iy)(s-iy + s^2\beta_2(s))} ds. \end{aligned}$$



Wij voeren nu de limietovergangen $\varepsilon \rightarrow 0$ en $|y| \rightarrow 0$ op een bepaalde manier door en stellen n.l. $|y| = \varepsilon^3$.

In dit geval convergeert n.l. $H(\varepsilon, y)$, als wij $|y| = \varepsilon^3$, $y_2 = 0$ zetten naar $2\pi i h(0)$.

In $G(\varepsilon, y)$ heeft de tweede term tot limiet nul, maar de eerste is

$$\varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{ds}{s + i\varepsilon^3} = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon + i\varepsilon^3}{- \varepsilon + i\varepsilon^3} = \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{1 + i\varepsilon^2}{-1 + i\varepsilon^2} = \pm \varphi(0) \pi i$$

zodat de stelling is bewezen.

Deze stelling doet sterk denken aan de vroeger bewezen stellingen voor de normale afgeleide van een enkele belegging.

Inderdaad, voor φ reeel is zij volkomen equivalent.

Cursus:

Methoden der mathematische physica.Deel I. Potentiaaltheorie en
conforme afbeelding.

door

R. Timman.

De complexe potentiaal van een enkele pool in het punt t_0 is n.l. gegeven door $\ln(z-t_0)$, dus van een belegging van de kromme C met $\varphi(t)$ is de potentiaal

$$\Phi(z) = \int_C \varphi(t) \cdot \ln(z-t) dt.$$

Indien wij het assenstelsel zo kiezen als boven is aangegaven, krijgen wij voor de normale afgeleide in een punt op de y -as

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = i \int_C \frac{\varphi(t)}{z-t} dt = -2\pi f(z).$$

De sprong in $f(z)$ bij het doorgaan door de kromme is $\varphi(z)$, dus de sprong in $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ is $2\pi \varphi(z)$, in overeenstemming met het vroeger gevonden resultaat.

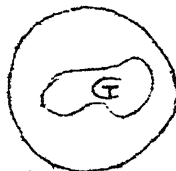
7. De fundamentele afbeeldingsstelling van Riemann.

Nadat de problemen van Neumann en Dirichlet voor de cirkel zijn opgelost, kunnen wij ook proberen ze op te lossen voor een willekeurig gesloten gebied.

Dit kan geschieden door middel van conforme transformatie, door het probleem terug te voeren tot het analoge probleem voor de cirkel. Deze mogelijkheid is gebaseerd op de afbeeldingsstelling van Riemann.

Wij beschouwen een enkelvoudig samenhangend gebied G , dat geheel in het inwendige van de eenheidscirkel in het z -vlak is gelegen en dat het nulpunt bevat en construeren nu een afbeeldingsfunctie $f(z)$, zodanig dat het gehele gebied G op de cirkel wordt afgebeeld en dat

$$f(0)=0, \quad f'(0)>0.$$



Om te bewijzen dat een dergelijke functie bestaat, moeten we eerst nog enige eigenschappen beschouwen.

In de eerste plaats is het mogelijk de eenheidscirkel zodanig op zichzelf af te beelden, dat een willekeurig inwendig punt P in de oorsprong overgaat en een willekeurige richting door P in de richting van de positieve x -as.

ij P gegeven door $z=a$, dan is

$$\zeta = e^{i\tau} \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

bij geschikte keuze van τ inderdaad de gezochte transformatie.

Immers, als $z=e^{i\varphi}$ en $a=re^{i\alpha}$, $r<1$, dan is

$$\zeta = e^{i\tau} \frac{e^{i\varphi}-re^{i\alpha}}{re^{-i\alpha}e^{i\varphi}-1} = e^{i(\tau+\alpha)};$$

dus de rand wordt op de rand afgebeeld en het binnengebied ook. Verder hebben wij voor het bewijs van het bestaan van de afbeeldingsfunctie van het gebied G op de cirkel nog een speciale afbeelding nodig, die als volgt wordt verkregen:

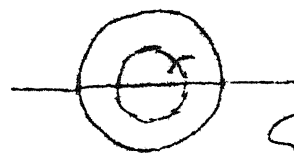
Beschouw een punt $P(z=\mu e^{i\alpha})$ $\mu<1$. Ga dan eerst een transformatie uitvoeren, die de cirkel in zich overvoert en die P in de oorsprong transformeert. En beschouw dan

$$\zeta = \sqrt{\frac{z-\mu e^{i\alpha}}{\mu e^{-i\alpha}z-1}}$$

Denken wij de eenheidscirkel in het ζ vlak opengesneden volgens de reële as, dan correspondeert met ieder der twee helften de gehele eenheidscirkel



z -vlak



ζ -vlak

in het z -vlak en de reële as wordt afgebeeld op een lijn door P naar de rand. Wij brengen nu om een een-eenduidige correspondentie aan te geven nog een tweede eenheidscirkel in het z -vlak aan, die wij, evenals de eerste opensnijden volgens het beeld van de reële as en op de eerste gelegd denken. Indien wij nu de ene kant van de doorsnijding van de bovenste cirkel bevestigen aan de andere kant op de onderste cirkel en omgekeerd, hebben wij een figuur gekregen, die wel één-éénduidig op de cirkel in het vlak wordt afgebeeld. Zo 'n figuur heet het oppervlak van Riemann behorende bij de afbeeldingsfunctie. Lopen wij in het vlak een keer om de oorsprong heen, dan wordt deze omloop in het z -vlak afgebeeld op een kromme, die twee keer om P heenloopt, één keer op het bovenste blad en één keer op het onderste blad. Tenslotte voeren wij nog in het vlak een transformatie uit,

$$\tau = \frac{e^{i\beta} \zeta - \mu^{1/2} e^{i\alpha/2}}{\mu^{1/2} e^{-i\alpha/2} \zeta - 1} = \tau(\zeta).$$

waardoor bereikt wordt, dat het nulpunt in het z -vlak overgaat in het nulpunt in het τ -vlak en waardoor tevens $\tau(0) > 0$ wordt door geschikte keuze van β .

De omkeringsfunctie noemen wij $z=\chi(\tau)$, zij is in de eenheidscirkel eenduidig en regulier. Blijkbaar is ook $\frac{\chi(\tau)}{\tau}$ voor $|\tau| \leq 1$ regulier en heeft de randwaarden $\left|\frac{\chi(\tau)}{\tau}\right|=1$ voor $|\tau|=1$.

Dan moet echter in het gehele binnengebied $\left|\frac{\chi(\tau)}{\tau}\right| < 1$ zijn; dus steeds is $|z| < |\tau|$.

Wij kunnen nog iets meer zeggen als wij kijken naar de punten $|z| < \mu$. Dan is er zeker een $q > 1$, zodanig dat voor al deze punten geldt

$$|\tau| \geq q(\mu) \cdot |z|.$$

Na deze voorbereidingen kunnen wij nu de afbeeldingsstelling van Riemann bewijzen. Daartoe beschouwen wij de verzameling M van alle afbeeldingen $\varphi(z)$, die voldoen aan $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0) > 0$ en die het gebied G afbeelden op een deelgebied H van de cirkel. Zij nu ρ de straal van de grootste cirkel om het nulpunt, die in H bevat is, dan bestaat een reeks functies $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$, die voldoen aan de voorwaarden $\varphi_n(0)=0$, $\varphi'_n(0) > 0$ en en waarvoor $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 1$ is, d.w.z. wij kunnen G afbeelden op een gebied, dat willekeurig dicht tot de cirkel nadert.

Indien n.l. de bovengrens van de getallen ρ_n kleiner was dan 1, dan konden wij een gebied H beschouwen, dat een cirkel bevat met straal $\rho = \mu - \varepsilon > 0$. Dan is er zeker een punt P met afstand μ tot de oorsprong, dat niet tot H behoort. Wij construeren nu over H de bovenstaande functie $\tau = \varphi_\mu(z)$, en weten, dat het gebied H een cirkel met straal $\mu - \varepsilon$ bevat. Dan zal H afgebeeld worden op een gebied H^* in het τ -vlak, dat het inwendige van een cirkel met straal $(\mu - \varepsilon)q(\mu)$ bevat. Daar echter $q > 1$ is, kunnen wij ε altijd zo kiezen, dat $(\mu - \varepsilon)q(\mu) > \mu$ wordt, d.w.z. wij hebben een afbeelding gevonden van G op een gebied H^* , dat een cirkel met straal $> \mu$ bevat, waaruit weer volgt dat μ niet de bovenste grens kan zijn van de cirkels, die in beeldgebieden van G beschreven konden worden. Hieruit volgt dus, dat $\mu = 1$ moet zijn, zodat het punt P niet bestaat.

Het bewijs dat de functies $\varphi_n(z)$ inderdaad naar de afbeeldingsfunctie convergeren, laten wij achterwege. (Zie Hurwitz-Courant, Funktionentheorie p. 397).

Door de voorgeschreven voorwaarden $f(0)=0$, $f'(0) > 0$ is de afbeeldingsfunctie ondubbelzinnig vastgelegd. Immers indien er twee functies $\zeta = f(z)$, $\zeta^* = f^*(z)$ waren, dan kon men z elimineren en kreeg door $\zeta^* = \varphi(\zeta)$ een omkeerbaar eenduidige afbeelding van de eenheidscirkel op zichzelf, waarbij $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0) > 0$ is. Dan is $\varphi(\zeta)$ een functie, die in de oorsprong positief is, nergens binnen de cirkel nul wordt en op de omtrek de absolute waarde 1 bezit. Dan moet zij echter volgens het principe van het maximum en minimum overal 1 zijn.

8. De functie van Green voor een enkelvoudig samenhangend gebied.

Wij beschouwen nu een enkelvoudig samenhangend gebied G , begrensd door een randkromme S , bestaande uit continue bogen en denken voor dit gebied het probleem van Dirichlet gesteld.

Op de rand S zij gegeven een continue functie $f(s)$. Gevraagd wordt een in G regulier harmonische functie u aan te geven, die op de rand tot de gegeven waarden $f(s)$ nadert.

Volgens stellingen van vroeger kunnen wij de waarde van de functie u direct uitdrukken in haar randwaarden en de waarden van de normale afgeleide.

$$2\pi u_P = \int_S \left\{ u \frac{\partial \log r}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} \log r \right\} ds.$$

Hierbij zijn de waarden van u op de omtrek bekend, de waarden van $\frac{\partial u}{\partial n}$ echter niet.

Indien echter v een harmonische functie is in het gehele gebied G , dan is

$$0 = \int_S \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds.$$

Gelukt het nu v zo te bepalen, dat op de omtrek S overal $v + \log r = \text{const.}$, dan is

$$2\pi u_P = \int_S u \frac{\partial}{\partial n} \{v + \log r\} ds.$$

omdat $\int_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ is.

De functie $G = v + \log r$ heet de functie van Green van de eerste soort om de pool P . Indien zij bekend is, is direct het probleem van Dirichlet voor het gebied G opgelost

$$2\pi u_P = - \int_S u \frac{\partial G_I}{\partial n} ds.$$

op een dergelijke wijze geeft het probleem van Neumann aanleiding tot een functie van Green van de tweede soort door te zoeken naar een functie w , zodanig, dat op de omtrek S

$$\frac{\partial G_{II}}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n} \log r = 0.$$

Dan geldt

$$2\pi u_P = - \int_S \frac{\partial u}{\partial n} \{w + \log r\} ds = - \int_S \frac{\partial u}{\partial n} G_{II} ds.$$

Voor een cirkel zijn de functies van Green gemakkelijk aan te geven.

De functie van Green van de eerste soort behorende bij het punt $P(r, \varphi)$ wordt verkregen als potentiaal behorende bij een bron ter sterkte 1 in het punt P en een even grote put

in het spiegelpunt $P^* \left(\frac{R^2}{r}, \varphi \right)$.

In het punt $Q(\rho, \varphi)$ is de waarde

$$G_I(\rho, \varphi; r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \{ \log r_{PQ} - \log r_{P^*Q} \} =$$

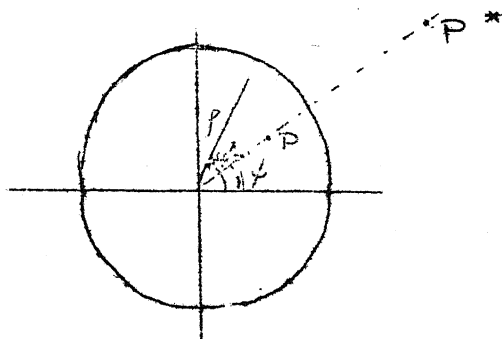
$$\frac{1}{4\pi} \log \frac{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \varphi)}{R^4 + \rho^2 - 2\rho \frac{R^2}{r} \cos(\varphi - \varphi)}$$

Voor $\rho = R$ wordt dit

$$G_I(R, \varphi; r, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \log \frac{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi)}{R^4 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi - \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{R} = \text{const.}$$

zodat de functie van Green is gevonden.

De functie van Green van de tweede soort wordt verkregen door in P en P^* even grote bronnen aan te brengen. De op deze wijze verkregen formules voor de oplossing van de problemen van Dirichlet en Neumann voor de cirkel komen overeen met de vroeger gevonden integraal van Poisson.



Voor een willekeurig gebied G hangt de functie van Green van de eerste soort zeer nauw samen met de functie, die de conforme transformatie van het gebied op de eenheidscirkel levert. Immers, indien $f(z) = \zeta$ het gebied G op de eenheidscirkel afbeeldt zodanig, dat $f(z_0)=0, f'(z_0) > 0$ dan is als z op S ligt $|f(z)|=1$.

Dan is

$$G(z, z_0) = \log |f(z)|,$$

immers voor $z=z_0$ heeft $f(z)$ juist de gewenste logarithmische singulariteit en voor $|z|$ op S is

$$G(z, z_0) = 0.$$

Cursus:

Methoden der mathematische physica.

Deel I. Potentiaaltheorie en
conforme afbeelding.

door

R. Timman.

Hoofdstuk V. Enkele toepassingen van de conforme transformatie op
technische problemen.

1. Stroming om draagvlakprofielen.

De bewegingsvergelijkingen om de stationnaire tweedimensionale stroming van een incompressibele vloeistof met verwaarlozing van de viscositeit zijn in rechthoekige coördinaten x en y

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2)$$

Samen met de continuïteitsvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

bepalen zij de stroming.

Is de stroming bovendien wervelvrij, dan is

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

Op grond van verg. (4) bestaat een functie φ de snelheidspotentiaal, zodanig, dat

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (5)$$

en op grond van verg. (3) bestaat een stroomfunctie ψ , zodanig, dat

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6)$$

Uit (5) en (6) volgt, dat φ en ψ gekoppeld zijn door de vergelijkingen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

d.w.z. juist door de vergelijkingen van Cauchy-Riemann. Er bestaat dus een functie $\Phi(z)$ van de complexe variabele $Z = x + iy$, zodat

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

en dat de geconjugeerde van de complexe snelheidsvector wordt

$$u - i v = \frac{d\phi}{dz}$$

Bij een conforme transformatie $z = f(\zeta)$ van het stromingsveld in het z vlak op een stromingsveld in een ζ vlak blijft de potentiaal invariant

$$\phi(z) = \phi\{z(\zeta)\}.$$

zodat de snelheden getransformeerd worden volgens de formule

$$\frac{d\phi(z)}{d\zeta} = \frac{d\phi}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = f'(\zeta) \cdot \frac{d\phi}{dz}$$

De snelheid in een punt wordt dus vermenigvuldigd met de afgeleide van de afbeeldingsfunctie.

Het verband tussen snelheid en druk in de vloeistof wordt direct gegeven door de verg. (1) en (2) met behulp van (4) te schrijven als

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} \right\} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} \right\} = 0.$$

waaruit volgt, dat in het gehele incompressibele stromingsveld geldt de wet van Bernoulli:

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

De twee hoofdproblemen uit de theorie der draagvlakken kunnen nu als volgt geformuleerd worden:

1. Gegeven is een draagvlakprofiel. Gevraagd wordt de drukverdeling (of, wat hiermee equivalent is, de snelheidsverdeling) langs de contour te bepalen, indien het draagvlak onder een gegeven invalshoek in een parallelstroming wordt geplaatst.

2. Ontwerp een draagvlakprofiel zodanig, dat bij een gegeven invalshoek een bepaalde voorgeschreven snelheidsverdeling langs de contour optreedt.

De stroming om een profiel wordt verkregen door dit stromingsveld conform af te beelden op de stroming om een cirkelcylinder. In beide gevallen is het probleem in wezen teruggebracht op het probleem van de conforme transformatie van de profielcontour op een cirkel; in het eerste geval wordt de afbeeldingsfunctie direct bepaald uit de geometrische gedaante van het profiel; in het tweede geval door de voorgeschreven snelheidsverdeling.

Om verder te gaan is het echter eerst nodig om de snelheidsverdeling om een cirkel in parallelstroming te onderzoeken.

2. De stroming van een cirkelcylinder.

Beschouw een cirkel in het z vlak met straal R en middelpunt in de oorsprong en de stroming om deze cirkel, die in het oneindige het gedrag heeft van een parallelstroming met geconjugeerde complexe snelheid $w = Ve^{-i\alpha}$

Indien de snelheid verder in het gehele vlak buiten de cirkel regulier moet zijn, kunnen wij schrijven

$$w = \frac{d\phi}{dz} = Ve^{-i\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n R^n}{z^n}$$

zodat de potentiaal wordt

$$\Phi = Ve^{-i\alpha} z + \alpha_1 R \log z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha_n R^n}{(n-1)z^{n-1}}$$

waarbij de integratieconstante nul is gesteld.

Als de cirkel stroomlijn moet zijn, moet voor $z = Re^{i\beta}$ gelden

$$\text{Im. } \phi = \text{const}$$

Stellen wij:

$$\alpha_n = a_n e^{i\beta_n}$$

dan levert dit

$$\text{const} = VR \sin(\beta - \alpha) + a_1 \sin \beta_1 R + a_2 \cos \beta_2 R^2 - \frac{a_n R^n}{n-1} \sin(\beta_n - (n-1)\beta)$$

waat meebrengt, dat

$$\beta_1 = \frac{1}{4}\pi \quad a_2 = -V \quad \beta_2 = \alpha \quad a_n = 0 \quad \text{voor } n \geq 3$$

zodat de uiteindelijke potentiaal wordt

$$\Phi = Ve^{-i\alpha} \left\{ z + \frac{R^2 e^{2i\alpha}}{z} \right\} + \frac{\Gamma \log z}{2\pi}$$

waarbij Γ een onbepaalde reële constante is.

De snelheid wordt dan gegeven door

$$w = Ve^{-i\alpha} \left\{ 1 - \frac{R^2 e^{2i\alpha}}{z^2} \right\} + \frac{i\Gamma}{2\pi z}$$

De waarde van de constante Γ is juist de circulatie om de cirkel, immers langs een willekeurige gesloten kromme, die de cirkel omsluit, is

$$\oint v_s ds = \oint \frac{\partial \phi}{\partial s} ds = \phi_+ - \phi_-$$

de toename van de snelheidspotentiaal als wij de cirkel één maal omlopen, die, wegens de logarithmische term juist de waarde Γ blijkt te hebben.

Op de omtrek van de cirkel is de toegevoegd complexe van de snelheid gegeven door

$$v_c = e^{-i\psi} \left\{ V \sin(\psi - \alpha) + \frac{1}{2\pi R} \int \right\}.$$

Indien wij wensen, dat het stuwpunt wordt gegeven door $\psi^* = 0$, wordt

$$v_c = e^{-i\psi} V \left\{ \sin(\psi - \alpha) + \sin \alpha \right\} = e^{-i\psi} V \cdot 2 \sin \frac{1}{2} \psi \cos \frac{1}{2} (\psi - \alpha)$$

3. Eigenschappen van de afbeeldingsfunctie.

Bij de hier beschouwde toepassing wordt het buitengebied van de cirkel in het z vlak steeds afgebeeld op het buitengebied van een draagstuk in het ζ vlak. Deze situatie gaat door een inversie in het z vlak en door een inversie in het ζ vlak t.o.v. een cirkel met middelpunt binnen de profielcontour over in de situatie, waarop de stelling van Riemann in de boven gegeven vorm betrekking heeft over.

Verder gaat bij deze inversie het oneindige in elk der vlakken over in de oorsprong in het geïnvverteerde vlak. Indien wij er bij de stelling van Riemann voor zorgden, dat de oorsprong in het ene vlak correspondeerde met de oorsprong in het andere vlak, zal nu dus het oneindige in het ene vlak corresponderen met het oneindige in het andere vlak en wij kunnen de richting van de pos. x as in het ene vlak laten corresponderen met de richting van de pos. x as in het andere vlak. In dit geval moet de afbeeldingsfunctie dus een Laurent-ontwikkeling toelaten van de vorm

$$f(z) = c_0 + z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

en de afgeleide

$$f'(z) = 1 - \frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} + \dots$$

Aangezien de verhouding tussen de geconjugeerden van de complexe snelheden gelijk is aan $f'(z)$

$$\frac{\overline{v_c}}{v_p} = \frac{d\zeta}{dz} = f'(z).$$

is deze volledig bepaald in toegevoegde punten van de cirkel en het profiel. Stellen wij

$$\tau(x, y) + i\tau(x, y) = \ln f'(z) = \ln f'(x + iy)$$

dan geldt

$$\left| \frac{v_c}{v_p} \right| = e^{\sigma}$$

en $\arg v_p - \arg v_c = \tau$.

In het bijzonder zij op de omtrek van de cirkel σ en τ geconjugeerde harmonische functies. Na invoering van poolcoördinaten $z = Re^{i\psi}$ op de

cirkel zijn en dus op de cirkel verbonden door de integraal van Poisson

$$\sigma(r) = a_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\theta) \cos \frac{1}{2}(r-\theta) d\theta,$$

$$\tau(r) = b_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) \cos \frac{1}{2}(r-\theta) d\theta.$$

en verder geldt de Fourier-ontwikkeling voor $r > R$:

$$\sigma(re^{i\theta}) + i\tau(re^{i\theta}) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n R^n}{i^n}$$

waarbij

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) e^{in\theta} d\theta.$$

Deze Fourier-coëfficiënten α_n zijn echter niet geheel willekeurig (behalve natuurlijk de restrictie, dat de reeks voor $r = R$ moet convergeren).

Immers, wij hadden gevonden, dat $f'(z)$ de ontwikkeling

$$f'(z) = 1 - \frac{C_1}{z^2} - \frac{2C_2}{z^3} - \dots$$

moest hebben, d.w.z.

$$h(z) = \ln f'(z) = -\frac{C_1}{z^2} - \frac{2C_2}{z^3} - \dots$$

zodat

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{dus}$$

$$\int_0^{2\pi} \sigma(\theta) d\theta = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) e^{i\theta} d\theta \quad \text{of}$$

$$\int_0^{2\pi} \sigma(\theta) \cos \theta d\theta = 0.$$

$$\text{en} \quad \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = 0.$$

en ook

$$\int_0^{2\pi} \tau(\theta) \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \tau(\theta) \sin \theta d\theta = 0.$$

Het is nu gemakkelijk om de coördinaten van de profielcontour uit te drukken in de functies σ en τ , immers uit

$$\frac{dS}{dz} = f(z) = e^{h(z)} = e^{\sigma(z) + i\tau(z)}.$$

volgt, dat

$$S - S_0 = \int_{z_0}^z e^{\sigma(z_1) + i\tau(z_1)} dz_1.$$

Door te substitueren

$$z_1 = R e^{i\theta}$$

en door de keuze $z_0 = R_0 e^{i\theta_0}$ volgt dan direct

$$S = \xi + i\eta = R i \int_0^{2\pi} e^{\sigma(\theta) + i(\tau(\theta) + \theta)} d\theta$$

of wel

$$\frac{\xi}{R} = - \int_0^{2\pi} e^{\sigma(\theta)} \sin(\tau(\theta) + \theta) d\theta$$

$$\frac{\eta}{R} = \int_0^{2\pi} e^{\sigma(\theta)} \cos(\tau(\theta) + \theta) d\theta$$

Verder zien wij, dat voldaan moet zijn aan

$$\int_0^{2\pi} e^{\sigma(\theta) + i(\tau(\theta) + \theta)} d\theta = 0.$$

zodat de profielcontour een gesloten contour wordt.

4. Het eerste hoofdp probleem uit de profieltheorie.

Met behulp van de verkregen relaties kunnen nu de twee hoofdp problemen uit de profieltheorie opgelost worden door middel van een iteratieproces.

De snelheid langs de profielcontour kan bepaald worden als de functies σ en τ bekend zijn als functies van de beeldhoek ν langs de cirkel.

De hoek tussen de raaklijn aan het profiel en de x as wordt gegeven door

$$\arg v_p = \arg v_c + \arg \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\pi}{2} + \varphi + \tau(\nu).$$

Indien de ligging van het profiel t.o.v. de coördinaatassen ξ en η gegeven is, is dus

$$\varphi + \tau(\nu) = \lambda(\xi).$$

gegeven als een bekende functie van ξ .

De onbekende functies $\tau(\nu)$, $\sigma(\nu)$, $\xi(\nu)$ en $\eta(\nu)$ worden nu door een iteratieproces bepaald.

Begin met een nulde orde benadering

$$\xi = \xi_0(\nu)$$

en gebruik de formules

$$\tau_n(\nu) = \lambda \left\{ \xi_{n-1}(\nu) \right\} - \nu.$$

$$\sigma_n(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_n(\theta) \cos \frac{1}{2}(\nu - \theta) d\theta$$

en dan

$$\xi_n(\nu) = -R \int_0^{2\pi} e^{\sigma_n(\theta)} \sin \{ \tau_n(\theta) + \theta \} d\theta.$$

Het kan bewezen worden, dat bij een geschikte keuze van de nulde orde benadering het proces convergeert.

Uit de limietwaarden

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$$

volgt dan de snelheidsverdeling door middel van de formule

$$\frac{v_p}{v_c} = e^{\sigma} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sin(\theta - \alpha) + \sin \alpha \right)}.$$

Hierbij is ervoor gezorgd, dat het achterste stuwpunt ligt in het punt, dat met $\theta = 0$ correspondeert. In het algemeen zal een draagvlakprofiel aldaar een scherpe punt hebben. Op de wijzigingen, die dit in de berekeningen aanbrengt, wordt hier niet verder ingegaan (vgl. R. Timman: The direct and inverse problem of aerofoil theory, Report F 16 of the National Aeronautical Research Institute, Amsterdam).

5. Het tweede hoofdprobleem uit de profieltheorie.

Bij het tweede hoofdprobleem is het niet mogelijk om de snelheidsverdeling langs de contour van het profiel voor te schrijven, want de contour is niet bekend.

In plaats daarvan schrijven wij de snelheid voor als een functie van de coördinaat ξ langs de koorde.

Deze snelheidsverdeling is echter niet willekeurig want de functie σ , die erbij behoort, moet voldoen aan de betrekkingen

$$\int_0^{2\pi} \sigma(\theta) d\theta = a, \quad \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (1)$$

Wij kiezen dus als gegeven snelheidsverdeling een functie, die drie parameters $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3$ bevat: $v_p(\xi, \kappa^1, \kappa^2, \kappa^3)$.

De functie $\sigma(\theta)$ is, zoals bekend, gegeven door

$$\sigma(\theta) = -\ln \left| \frac{v_p}{v_c} \right| + \ln 2 \left\{ \sin(\theta - \alpha) + \sin \alpha \right\} \quad (2)$$

zodat het verband tussen de onbekende functies $\sigma(\theta)$ en $\xi(\theta)$ gegeven is door een relatie

$$\sigma(\theta) = \mu \left\{ \xi(\theta), \theta, \kappa^1, \kappa^2, \kappa^3 \right\}. \quad (3)$$

die uit (2) volgt.

Neem nu weer een nulde orde benadering

$$\xi = \xi_0(\theta).$$

dan volgt de afbeeldingsfunctie tenslotte weer uit het iteratieproces

$$\tau_{n-1}(\theta) = \mu \left\{ \xi_{n-1}(\theta), \theta, \kappa_{n-1}^1, \kappa_{n-1}^2, \kappa_{n-1}^3 \right\}.$$

waarbij telkens $\kappa_{n-1}^1, \kappa_{n-1}^2$ en κ_{n-1}^3 bepaald worden door

$$\int_0^{2\pi} \tau_{n-1}(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \tau_{n-1}(\theta) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \tau_{n-1}(\theta) \sin \theta d\theta = a$$

Verder is

$$\tau_{n-1}(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{n-1}(\theta) \cos \frac{1}{2}(r-\theta) d\theta.$$

en

$$\xi_n(r) = -R \int_0^{2\pi} e^{\tau_{n-1}(\theta)} \sin \{ \tau_{n-1}(\theta) + \theta \} d\theta$$

Tenslotte wordt de verticale coördinaat η_n gevonden uit

$$\eta_n(\theta) = R \int_0^{2\pi} e^{\tau_{n-1}(\theta)} \cos \{ \tau_{n-1}(\theta) + \theta \} d\theta.$$

2de Boerhaavestraat 49,
Amsterdam O.

Cursus:
Methoden der mathematische physica.

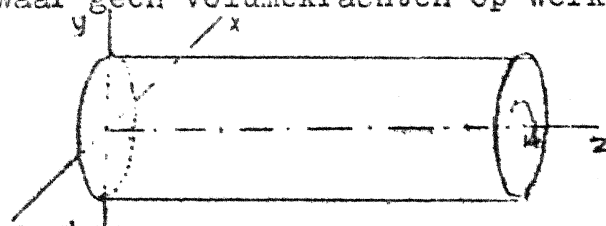
Deel I. Potentiaaltheorie en
conforme afbeelding.

door

R. Timman.

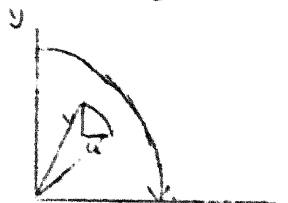
6. Torsie van staven met willekeurige doorsnede.

Beschouw een cilindrische staaf, waar geen volumekrachten op werken, die in de doorsnede $z=0$ ingeklemd is en waar in de doorsnede $z=l$ een koppel M werkt met als in de richting van de cylinderas. Neem aan, dat op het zijvlak van de cylinder geen krachten werken.



Indien de doorsnede van de cylinder een cirkel is, is de oplossing van het probleem zeer eenvoudig. De doorsnede blijft vlak bij de deformatie en het koppel zal eenvoudig iedere doorsnede over een hoek θ verdraaien.

Bij kleine verdraaiingen nemen wij aan, dat θ eenvoudig evenredig is met z : $\theta = \alpha z$. De verplaatsing van elk punt in de z richting w is nul en de verplaatsingen in x en y richting zijn



$$u = -\theta y = -\alpha z y,$$

$$v = \theta x = \alpha z x,$$

Volgens de wet van Hooke kunnen wij nu direct de bijbehorende spanningen vinden

$$\tau_{xx} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$\tau_{yy} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\tau_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \alpha \mu (-z + z) = 0.$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\alpha \mu y.$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \alpha \mu x.$$

Blijkbaar voldoen deze aan de evenwichtsvoorwaarden

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0.$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0.$$

en aan de compatibiliteitsvoorwaarden (hier niet uitgeschreven), die eisen, dat elementen, die voor de deformatie aan elkaar sluiten, dit na de deformatie ook nog doen.

De randvoorwaarden eisen, dat op de rand van de cylinder geen krachten werken.

$$\tau_{xx} \cos(x, \nu) + \tau_{xy} \cos(y, \nu) = 0.$$

$$\tau_{yx} \cos(x, \nu) + \tau_{yy} \cos(y, \nu) = 0.$$

$$\tau_{zx} \cos(x, \nu) + \tau_{zy} \cos(y, \nu) = 0.$$

Aan de eerste twee voorwaarden is inderdaad voldaan, de derde geeft

$$-\alpha \mu y \frac{dy}{ds} + \alpha \mu z \frac{dz}{ds} = 0.$$

waaraan inderdaad voldaan is, als de doorsnede een cirkel is.

Uit het feit, dat algemeen bewezen kan worden dat deze evenwichtsvraagstukken slechts één oplossing toelaten, blijkt, dat de gevonden oplossing van een staaf met cirkelvormige doorsnede dé oplossing voorstelt.

Uit de derde randvoorwaarde blijkt tevens, dat voor een niet cirkelvormige doorsnede de eenvoudige deformatie, waarbij $w=0$, $u=-\alpha zy$, $v=\alpha zx$ niet kan voldoen. Er zal een welving van de vlakke doorsnede optreden, w zal $\neq 0$ zijn. Stel nu $w=\alpha \varphi(x,y)$ en zoek of een functie φ te vinden is, die aan de gewenste voorwaarden voldoet.

In dit geval worden de spanningen

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = 0,$$

$$\tau_{xy} = 0,$$

$$\tau_{yz} = \mu \alpha \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right).$$

en de evenwichtsvoorwaarden leveren

$$\mu \alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

zodat φ een harmonische functie moet zijn.

Verder is weer voldaan aan de compatibiliteitsvoorwaarden (niet uitgeschreven).

De randvoorwaarden aan de buitenrand van de cylinder eisen nu, dat

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \cos(x, \nu) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \cos(y, \nu) = 0,$$

of wel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(x, \nu) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(y, \nu) = y \cos(x, \nu) - x \cos(y, \nu)$$

hetgeen overgaat in

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y \cos(x, \nu) - x \cos(y, \nu)$$

Hieruit volgt, dat het probleem van de torsie van een cilindrische staaf equivalent is met het probleem van Neumann.

Inderdaad is hier aan de eis, die bij het probleem van Neumann aan de normale afgeleide werd gesteld, voldaan, immers geldt

$$\int_C \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \int_C \left\{ y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} \right\} ds = 0.$$

Naast de torsiefunctie φ kunnen wij de geconjugeerde functie $\psi(x,y)$ beschouwen, dan geldt langs de rand, dat

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = y \cos(x, n) - x \sin(y, n) = y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{1}{2} (x^2 + y^2).$$

zodat wij ook kunnen zeggen, dat langs de rand

$$\psi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \text{Const.}$$

d.w.z. voor de ψ functie is het torsieprobleem equivalent met het probleem van Dirichlet, dat wij in het voorgaande volledig hebben opgelost voor een willekeurig gebied.

De samenhang van de functie ψ met de spanningen wordt ook direct duidelijk, immers

$$\tau_{yz} = \mu \alpha \left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \mu \alpha \left(x - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) = \mu \alpha \left(y + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$

Voeren wij dus in de plaats van de functie ψ een spanningsfunctie $\Psi = \psi(x,y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ in, dan geldt

$$\tau_{yz} = -\mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\tau_{xz} = \mu \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

Op de rand moet $\psi = \text{constant}$ zijn en in het inwendige moet zij voldoen aan de vergelijking van Poisson

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2.$$

Met behulp van de voorgaande theorie is het dus mogelijk om het torsieprobleem voor een staaf met willekeurige doorsnede, mits deze enkelvoudig samenhangend is, volledig op te lossen.

Wij laten nu nog zien, dat de spanningsverdeling, die op deze wijze wordt verkregen, equivalent is met een koppel.

De resulterende kracht in de x-richting is

$$\iint \tau_{xz} dx dy = \mu \alpha \iint \frac{\partial \Psi}{\partial y} dx dy = \mu \alpha \left\{ \Psi(y) - \Psi(y) \right\} dx = 0$$

daar $\Psi = \text{const.}$ op de rand.

Evenzo bewijzen wij, dat de resulterende kracht in y richting nul is.

Het moment om de oorsprong wordt

$$M_z = \iint (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dx dy = -\mu \alpha \iint \left\{ x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + y \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\} dx dy =$$

$$-\mu \alpha \iint \left[\frac{\partial (x \Psi)}{\partial x} + \frac{\partial (y \Psi)}{\partial y} \right] dx dy + 2 \mu \alpha \iint \Psi dx dy.$$

Transformeren wij deze eerste uitdrukking met de stelling van Green, dan wordt

$$M_z = -\mu \alpha \int_C \Psi [x \cos(x, n) + y \sin(y, n)] ds + 2 \mu \alpha \iint \Psi dx dy.$$

Kiezen wij $\Psi = 0$ op de contour, dan wordt $M = 2 \mu \alpha \iint \Psi dx dy$.

Voeren wij nog de torsiestijfheid D in door de formule $M = D \cdot \alpha$,

dan is $D = 2 \mu \iint \Psi dx dy$.